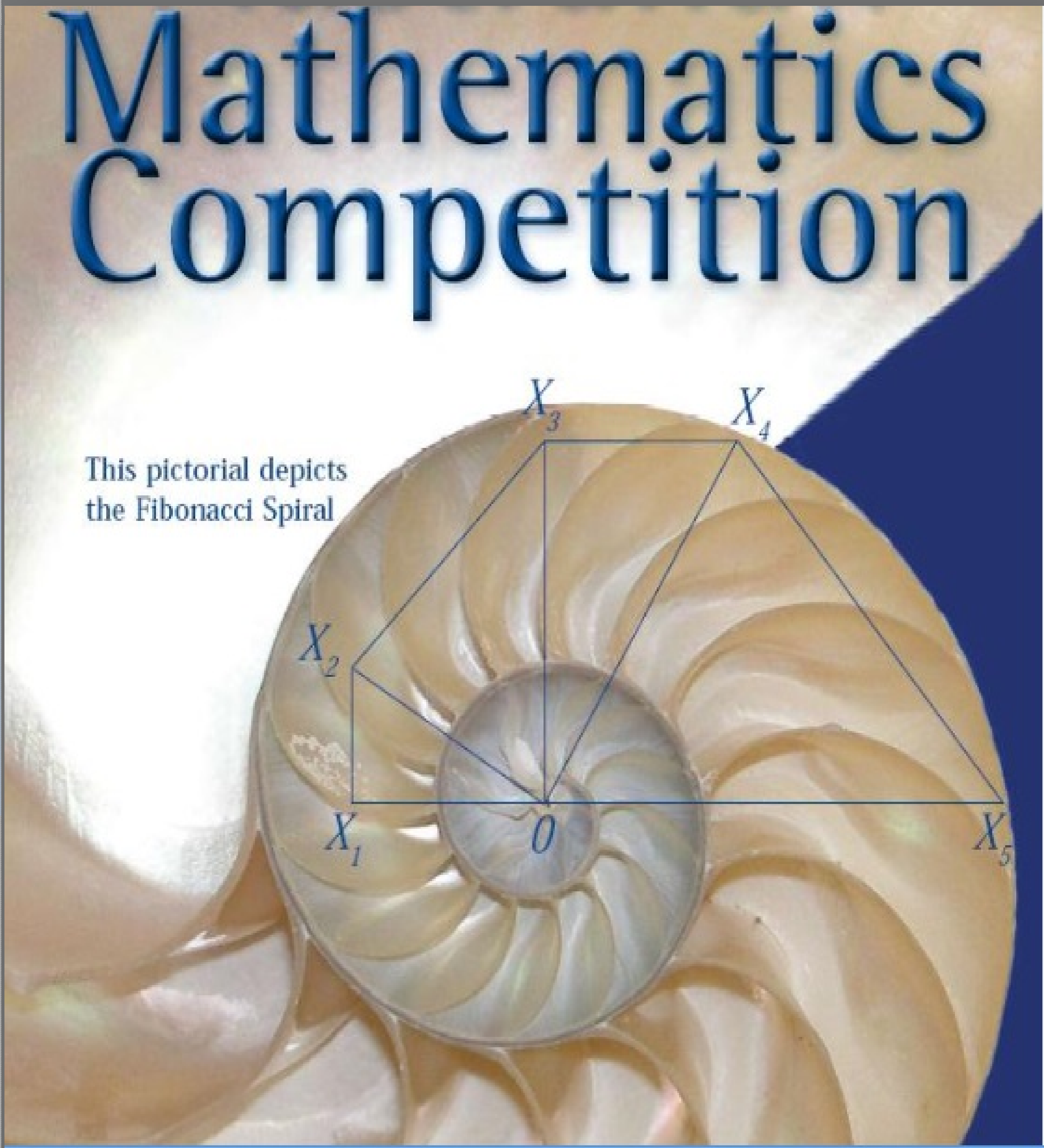
ប្រជុំវិញ្ញាសាសិស្សពូកែគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១១



គណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម ៣០-៤ ឆ្នាំ២០១២

បកប្រែដោយ កែវ សិរី

www.keoserey.wordpress.com

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

សំរាប់ថ្នាក់ទី១១ លើកទី XVIII

១. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម: $\begin{cases} x^3 - y^3 = 9 \\ 2x^2 + y^2 - 4x + y = 0 \end{cases}$

២. គេឲ្យស្វ៊ីត (x_n) កំណត់ដោយ: $x_1; x_{n+1} = \dfrac{x_n^4 + 9}{x_n^3 - x_n + 6}$ ។

a). ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim x_n = +\infty$

b). ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន n នីមួយៗគេតាង $y_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k^3 + 3}$ ។ គណនា $\lim y_n$ ។

៣. គេឲ្យត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្សមានជ្រុងស្មើ a ផ្ចិត G ។ បន្ទាត់ d មួយចល័តហើយតែងកាត់តាម G ហើយកាត់បណ្តាបន្ទាត់ BC, CA, AB រៀងគ្នាត្រង់ M, N, P ។
រកតំលៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម: $T = GM.GN.GP$ ។

៤. រកគ្រប់បណ្តាគូអនុគមន៍ $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់បណ្តាលក្ខខណ្ឌខាងក្រោម:

i). $f(0) = g(0) = 1; g(1) = 2$

ii). $f(x) - f(y) = (x-y)g(x+y)$

៥. ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n > 1$ មួយ ត្រូវបានហៅថាមិនមែនជាការប្រាកដដាច់ខាត បើ n មិនមានតួចែកជាការប្រាកដខុសពី 1 ។
ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ n ជាចំនួនពហុគុណហើយ $n-1$ ចែកដាច់នឹង $\varphi(n)$ នោះ n មិនមែនជាការប្រាកដដាច់ខាត ហើយ n មានតួចែកជាចំនួនបឋមយ៉ាងតិច 3 (ក្នុងនោះ $\varphi(n)$ ជាបណ្តាចំនួនគត់វិជ្ជមានមិនលើសពី n ហើយបឋមរវាងគ្នានឹង n) ។

៦. នៅលើប្រឡោះនីមួយៗរបស់តារាង 4×4 ប្រឡោះការេ, គេបំពេញលេខមួយក្នុងចំណោមពីរលេខ 1 រឺ -1 យ៉ាងណាឲ្យផលបូកបណ្តាចំនួនតាមជួរដេកនីមួយៗ និងតាមជួរឈរនីមួយៗសុទ្ធតែស្មើ 0 ។
សួរថា តើមានប៉ុន្មានរបៀបក្នុងការបំពេញលេខដូចខាងលើ។

ចំលើយ

១. $$\begin{cases} x^3 - y^3 = 9 \\ 2x^2 + y^2 - 4x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 8 = y^3 + 1 \\ -6x^2 + 12x = 3y^2 + 3y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 \\ 2x^2 + y^2 - 4x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^3 = (y+1)^3 \\ 2x^2 + y^2 - 4x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = y + 1 \\ 2x^2 + y^2 - 4x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3 \\ 2(y+3)^2 - 4x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3 \\ 3y^2 + 9y + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3 \\ \left[\begin{array}{l} y = -1 \\ y = -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \text{ រឺ } \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

២. • ពិនិត្យ $x_{n+1}-3=\dfrac{x_n^4+9}{x_n^3-x_n+6}-3=\dfrac{(x_n-3)(x_n^3+3)}{(x_n^3+3)-(x_n-3)}$ (*)

ដោយប្រើវិចារអនុមានរួម យើងស្រាយបញ្ជាក់បាន: $x_n>3, \forall n\geq 1$

• ពិនិត្យ $x_{n+1}-x_n=\dfrac{x_n^4+9}{x_n^3-x_n+6}-x_n=\dfrac{x_n^2-6x_n+9}{x_n^3-x_n+6}$

$\Rightarrow x_{n+1}-x_n=\dfrac{(x_n-3)^2}{x_n^3-x_n+6}>0, \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

ដូចនោះ (x_n) ជាស្វ៊ីតកើនហើយ $4=x_1<x_2<\dots$

• ឧបមាថា (x_n) ទាល់លើ $\Rightarrow \lim x_n=a>4$

ដូចនោះ $a=\dfrac{a^4+9}{a^3-a+6} \Rightarrow a=3<4$ (មិនសមហេតុផល)

ទាញបាន (x_n) ទាល់លើ។ ដូចនេះ $\lim x_n=+\infty$

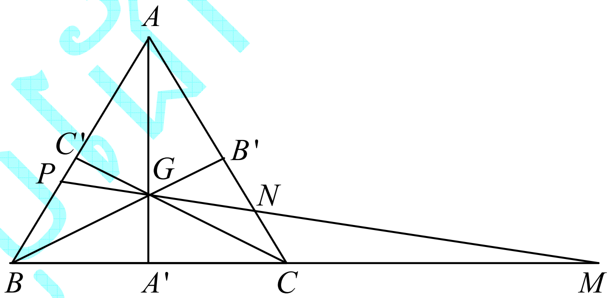
• ពី (*) $\Rightarrow \dfrac{1}{x_{n+1}-3}=\dfrac{1}{x_n-3}-\dfrac{1}{x_n^3+3} \Rightarrow \dfrac{1}{x_n^3+3}=\dfrac{1}{x_n-3}-\dfrac{1}{x_{n+1}-3}$

$\Rightarrow y_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{x_k^3+3}=\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{x_k-3}-\dfrac{1}{x_{k+1}-3}\right)=\dfrac{1}{x_1-3}-\dfrac{1}{x_{n+1}-3}=1-\dfrac{1}{x_{n+1}-3}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} y_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x_{n+1}-3}\right)=1$ ។

៣. ដោយមិនធ្វើឲ្យបាត់បង់លក្ខណៈទូទៅ ឧបមាថាត្រីកោណ ABC មានទិសដៅវិជ្ជមាន។

តាង A', B', C' រៀងគ្នាជាចំនុចកណ្ដាលរបស់ BC, CA, AB និងតាង $(GA',d)=\alpha \pmod{\pi}$ ។



ពេលនោះយើងបាន:

• $(GB',d)=(GB',GA')+(GA',d)=-\dfrac{2\pi}{3}+\alpha \pmod{\pi}$

$(GC',d)=(GC',GA')+(GA',d)=\dfrac{2\pi}{3}+\alpha \pmod{\pi}$

• ពីនោះទាញបាន: $T=GM.GN.GP=GA'.\dfrac{GM}{GA'}.GB'.\dfrac{GN}{GB'}.GC'.\dfrac{GP}{GC'}$

$$=\frac{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)^3}{\left|\cos\alpha.\cos\left(\alpha-\dfrac{2\pi}{3}\right).\cos\left(\alpha+\dfrac{2\pi}{3}\right)\right|}=\frac{a^3\sqrt{3}}{18|\cos 3\alpha|}\geq\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$$ ។

• សញ្ញាស្មើកើតមាន $\Leftrightarrow |\cos 3\alpha| = 1 \Leftrightarrow \sin 3\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ ។

ដូចនេះ d ត្រូវតគ្នានឹងកំពស់មួយ ក្នុងចំណោមកំពស់ទាំងបីរបស់ត្រីកោណ។

៤. • $f(x) - f(y) = (x-y)g(x+y) \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}$ (1)

តាង $F(x) = f(x) - 1, F(0) = 0$

ពេលនោះ (1) ក្លាយទៅជា $F(x) - F(y) = (x-y)g(x+y)$ (2)

• ក្នុង (2) ឲ្យ $y = 0$ យើងបាន $F(x) = xg(x)$

ពេលនោះ (2) ក្លាយទៅជា $xg(x) - yg(y) = (x-y)g(x+y)$ (3)

• តាង $G(x) = g(x) - 1, G(0) = 0$

យើងសរសេរឡើងវិញនូវទំនាក់ទំនង (3): $xG(x) - yG(y) = (x-y)G(x+y)$ (4)

ជំនួស x ដោយ $-y$ យើងបាន: $xG(x) - yG(y) = (x+y)G(x-y)$

ពេលនោះ: $(x-y)G(x+y) = (x+y)G(x-y)$

តាង $x + y = a, x - y = b$ យើងបាន: $bG(a) = aG(b)$

ទាញបាន $\dfrac{G(a)}{a} = \dfrac{G(b)}{b} \quad \forall a, b \neq 0$

ដូចនេះ: $G(x) = mx \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (m ជាចំនួនពិតដែលគេឲ្យ)

• $G(1) = g(1) - 1 = 1 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow G(x) = x \Rightarrow g(x) = x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ពីនោះនាំឲ្យ $f(x) = x^2 + x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ឡើងវិញ យើងបាន $f(x) = x^2 + x + 1$ និង $g(x) = x + 1$ ជាបណ្ដាអនុគមន៍ដែលត្រូវរក។

៥. • តាង p ជាតួចែកបឋមណាមួយរបស់ n ។ យើបាន $n = p^r m$,ចំពោះ r និង m ជាបណ្ដាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហើយ $(p, m) = 1$ ។

យើងបាន: $\varphi(n) = \varphi(p^r)\varphi(m) = p^{r-1}(p-1)\varphi(m)$ និង $(n-1) = p^r m - 1$

តាមបំរាប់: $\varphi(n) | (n-1) \Rightarrow p^{r-1} | (p^r m - 1) \Rightarrow r - 1 = 0$ (ព្រោះ $(p, p^r m - 1) = 1$)

$\Rightarrow r = 1$ (ហើយដូចនោះ $m > 1$ ព្រោះ n ជាចំនួនពហុគុណ)។

ដូចនេះ m មិនមែនជាចំនួនការេប្រាកដដាច់ខាត ហើយ n មានយ៉ាងតិចតួចែកបឋមពីរ។

• ឧបមាថា $n = pq$ ចំពោះ p និង q ជាចំនួនបឋមពីរផ្សេងគ្នា។ ពេលនោះ

$$(p-1)(q-1) = \varphi(p)\varphi(q) = \varphi(n) | (n-1) = pq - 1$$

ទាញបាន $(p-1) | (pq-1)$

ម្យ៉ាងទៀត: $(p-1) | (p-1)q \Rightarrow (p-1) \big| [(pq-1) - (p-1)q] = q - 1$

ដូចគ្នាដែរ, $q - 1 | (p-1)$, ដូចនេះ $p = 1$, មិនសមហេតុផល!

ភាពផ្ទុយគ្នានោះ បង្ហាញថា n មានយ៉ាងតិចតួចែកបឋមបី, បញ្ហាត្រូវស្រាយបញ្ជាក់។

៦. យើងឃើញថា ជួរដេកនីមួយៗនិង ជួរឈរនីមួយៗសុទ្ធតែមានផ្ទុកចំនួន 1ពីរ និង -1 ពីរ។ បើបីជួរដេកដំបូង ត្រូវបានបំពេញយ៉ាងណាឲ្យផលបូកបណ្ដាលេខក្នុងជួរដេកនីមួយៗស្មើ 0 និងក្នុងជួរឈរនីមួយៗមានមិនលើសពីពីរចំនួនស្មើគ្នា នោះយើងមានរបៀបតែមួយគត់ក្នុងការបំពេញចំនួនចូលក្នុងជួរដេកទីបួន។ ដូចនោះ យើងគ្រាន់តែរកចំនួនរបៀបបំពេញចំនួនចូលក្នុងបីជួរដេកដំបូង។

នៅជួរដេកទីមួយ និងទីពីរ, ជួរដេកនីមួយៗមាន $C_4^2 = 6$ របៀបបំពេញ ដែលផលបូកគ្រប់ចំនួនស្មើ 0 ។

ក្នុង 6 របៀបបំពេញនៅជួរដេកទីពីរ យើងចែកជា 3 ករណី:

• ករណីទី 1: របៀបបំពេញចំនួននៅជួរដេកទីពីរ ត្រូវគ្នានឹងរបៀបបំពេញចំនួននៅជួរដេកទីមួយ 0 ទីតាំង: មាន 1 របៀប។ ពេលនោះ, មាន 6 របៀបបំពេញនៅជួរដេកទីបី។

• ករណីទី 2: របៀបបំពេញចំនួននៅជួរដេកទីពីរ ត្រូវគ្នានឹងរបៀបបំពេញចំនួននៅជួរដេកទីមួយ 4 ទីតាំង: មាន 1 របៀប។ ពេលនោះ, មាន 1 របៀបបំពេញនៅជួរដេកទីបី។

• ករណីទី 3: របៀបបំពេញចំនួននៅជួរដេកទីពីរ ត្រូវគ្នានឹងរបៀបបំពេញចំនួននៅជួរដេកទីមួយ 2 ទីតាំង: មាន 4 របៀប។ ពេលនោះ, របៀបបំពេញចំនួនក្នុងជួរដេកទីពីរ នីមួយៗ, មាន 2 របៀបក្នុងការបំពេញចំនួននៅជួរដេកទីបី។

ដូចនេះ ចំនួនរបៀបបំពេញចំនួនដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លំហាត់មាន: $6.1.6+6.1.1+6.4.2=90$ របៀប។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

វិញ្ញាសាស្នើទី១

១. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោមលើសំនុំចំនួនពិត:
$$\begin{cases} x^3+\dfrac{2\sqrt[3]{2}(x+y+xy+1)}{\sqrt[3]{14-x^2+2\cos x}}=(x+1)^2+y^3 \\ y^3+\dfrac{2\sqrt[3]{2}(x+y+xy+1)}{\sqrt[3]{14-y^2+2\cos y}}=(y+1)^2+x^3 \end{cases}$$

២. គេឲ្យស្វ៊ីត (x_n) កំណត់ដោយ: $\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=2012 \\ x_{n+2}=\sqrt[3]{x_{n+1}^2.x_n}, \quad \forall n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$

ស្រាយបញ្ជាក់ថាស្វ៊ីត (x_n) ជាស្វ៊ីតរួម និងរក $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ ។

៣. គេឲ្យត្រីកោណសម័ង្ស ABC មានជ្រុងស្មើ a, មានទីប្រជុំទំងន់ G ។ បន្ទាត់ d មួយ ចល័តហើយតែងកាត់តាមចំនុច G និងកាត់បណ្តាបន្ទាត់ BC, CA, AB តាមលំដាប់ត្រង់ M, N, P ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា ទំនាក់ទំនងខាងក្រោម មានតំលៃមិនអាស្រ័យនឹងបន្ទាត់ d : $T=\dfrac{1}{GM^4}+\dfrac{1}{GN^4}+\dfrac{1}{GP^4}$ ។

៤. រកគ្រប់អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់គ្រប់លក្ខខណ្ឌ:

$a)$ $f(x)\geq x, \forall x\in\mathbb{R}$

$b)$ $f(x+y)\geq f(x)+f(y), \forall x,y\in\mathbb{R}$ ។

៥. គេឲ្យពីរចំនួនគត់ x, y ផ្ទៀងផ្ទាត់: $x^2-2xy+y^2-5x+10y\equiv x^2-3xy+2y^2+24x-y\equiv 0 \pmod{23}$ ។ បង្ហាញថា: $xy-12x+21y\equiv 0 \pmod{23}$ ។

៦. រកសំនុំនៃគ្រប់បណ្តាចំនួនគត់ធម្មជាតិសេស n ផ្ទៀងផ្ទាត់ n អាចបំបែកបានជាផលបូកនៃ 2012 ចំនួនពហុគុណ តែមិនអាចបំបែកបានជាផលបូកនៃ 2013 ចំនួនពហុគុណទេ។

ចំលើយ

១. យើងងាយនឹងស្រាយបញ្ជាក់បាននូវវិសមភាពខាងក្រោម: $\cos x \ge 1-\frac{x^2}{2}\quad \forall x\in\mathbb{R}\quad (1)$

សមភាពកើតមានលុះត្រាតែ $x=0$

ប្រព័ន្ធដែលឲ្យសមមូលនឹង $\begin{cases} x^3+\dfrac{2(x+1)(y+1)}{\sqrt[3]{\cos x+\frac{x^2}{2}-1+8}}=(x+1)^2+y^3 \\ y^3+\dfrac{2(x+1)(y+1)}{\sqrt[3]{\cos y+\frac{y^2}{2}-1+8}}=(y+1)^2+x^3 \end{cases}$

បូកអង្គនឹងអង្គនៃបណ្តាសមីការរបស់ប្រព័ន្ធ យើងបាន:

$$2(x+1)(y+1)\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\cos x+\frac{x^2}{2}-1+8}}+\frac{1}{\sqrt[3]{\cos y+\frac{y^2}{2}-1+8}}\right)=(x+1)^2+(y+1)^2 \qquad (2)$$

តាម (2) យើងទាញបាន $(x+1)(y+1)\ge 0$

ដូចនោះ យើងបានបណ្តាករណីខាងក្រោម:

+ បើ $(x+1)(y+1)=0$ នោះប្រព័ន្ធដែលឲ្យមានចំលើយ $x=y=-1$

+ បើ $(x+1)(y+1)>0$ អនុវត្តន៍ (1) និង (2) យើងទាញបាន:

$$(x+1)^2+(y+1)^2\le 2(x+1)(y+1)\Leftrightarrow (x-y)^2\le 0\Leftrightarrow x=y$$

ដូចនោះ ក្នុងករណីនេះប្រព័ន្ធមានចំលើយ $x=y=0$

បូករួមគ្រប់បណ្តាករណីយើងបានចំលើយរបស់ប្រព័ន្ធដែលឲ្យគឺ $(0;0),(-1;-1)$ ។

២. ដោយប្រើវិចារអនុមានរួម, យើងស្រាយបញ្ជាក់បានថាស្វ៊ីត (x_n) មានរូបមន្តទូទៅគឺ $x_n=2012^{y_n},\forall n\in\mathbb{N}^*$

ចំពោះស្វ៊ីត (y_n) ត្រូវបានកំណត់ដោយ: $\begin{cases} y_1=0 \\ y_2=1 \\ y_{n+2}=\dfrac{2y_{n+1}+y_n}{3},\ \forall n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$

យើងមាន $y_{n+2}-y_{n+1}=-\frac{1}{3}(y_{n+1}-y_n),\ \forall n\ge 1$

ទាញបាន $y_{n+2}-y_{n+1}=\left(-\frac{1}{3}\right)^n(y_2-y_1)=\left(-\frac{1}{3}\right)^n,\ \forall n\ge 1$

ពេលនោះ: $y_2-y_1=1=\left(-\frac{1}{3}\right)^0$

$$y_3-y_2=-\frac{1}{3}$$

$$y_4-y_3=\left(-\frac{1}{3}\right)^2$$

....

$$y_{n+2}-y_{n+1}=\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

បូកអង្គនឹងអង្គគ្រប់សមភាពខាងលើ យើងបាន

$$y_{n+2}-y_1=\left(-\frac{1}{3}\right)^0+\left(-\frac{1}{3}\right)^1+\ldots+\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$$

ដោយ $y_1=0$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=0$ នោះ $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=\frac{3}{4}$

ដូចនោះស្វ៊ីត (x_n) ជាស្វ៊ីតរួម និងមាន $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=2012^{\frac{3}{4}}$ ។

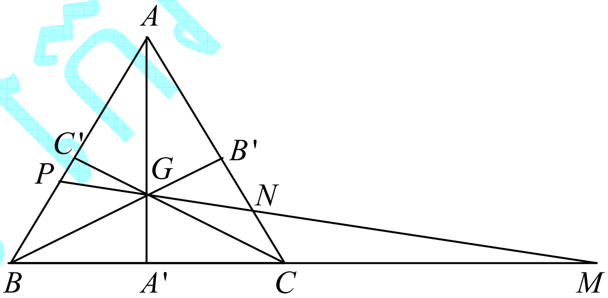
៣. តាង A',B',C' រៀងគ្នាជាចំនុចកណ្តាលរបស់ BC,CA,AB ហើយ X ជាចំនុចណាមួយស្ថិតនៅលើ d ដែល $(X\neq G)$ និងតាង $\left(\overrightarrow{GA'},\overrightarrow{GX}\right)=\alpha$, ពេលនោះយើងបាន:

$$\left(\overrightarrow{GB'},\overrightarrow{GX}\right)=\left(\overrightarrow{GB'},\overrightarrow{GA'}\right)+\left(\overrightarrow{GA'},\overrightarrow{GX}\right)\ (\text{mod } 2\pi)$$

$$=-\frac{2\pi}{3}+\alpha\ (\text{mod } 2\pi)$$

$$\left(\overrightarrow{GC'},\overrightarrow{GX}\right)=\left(\overrightarrow{GC'},\overrightarrow{GA'}\right)+\left(\overrightarrow{GA'},\overrightarrow{GX}\right)\ (\text{mod } 2\pi)$$

$$=\frac{2\pi}{3}+\alpha\ (\text{mod } 2\pi)$$



ពីនោះទាញបាន:

$$T=\frac{1}{GM^4}+\frac{1}{GN^4}+\frac{1}{GP^4}=\left(\frac{1}{a\sqrt{3}/6}\right)^4\left[\left(\frac{GA'}{GM}\right)^4+\left(\frac{GB'}{GM}\right)^4+\left(\frac{GC'}{GM}\right)^4\right]$$

$$=\frac{144}{a^4}\left[\cos^4\left(\overrightarrow{GA'},\overrightarrow{GX}\right)+\cos^4\left(\overrightarrow{GB'},\overrightarrow{GX}\right)+\cos^4\left(\overrightarrow{GC'},\overrightarrow{GX}\right)\right]$$

$$=\frac{144}{a^4}\left[\cos^4\alpha+\cos^4\left(-\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)+\cos^4\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)\right]$$

នៅលើសំនុំ R ពិនិត្យអនុគមន៍ $f(x)=\cos^4 x+\cos^4\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)+\cos^4\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$

យើងមាន: $f'(x)=-4\sin x\cos^3 x-4\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)\cos^3\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)-4\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\cos^3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$

$$=-\sin 2x(1+\cos 2x)-\sin\left(2x-\frac{4\pi}{3}\right)\left[1+\cos\left(2x-\frac{4\pi}{3}\right)\right]-\sin\left(2x+\frac{4\pi}{3}\right)\left[1+\cos\left(2x+\frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

$$=-\left[\sin 2x+\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)\right]-\frac{1}{2}\left[\sin 4x+\sin\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(4x+\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

យកចិត្តទុកដាក់ថា $\forall x\in\mathbb{R}$ នោះ: $\sin x+\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin x+2\sin x.\cos\frac{2\pi}{3}$

$$=\sin x-\sin x=0$$

ពីនោះទាញបាន $f'(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ ។ បង្ហាញថា $f(x)=C,\forall x\in\mathbb{R}$ $(C=const)$។

ឲ្យ $x=0$ យើងបាន $C=\frac{9}{8}$ ។ ដូចនេះ $T=\frac{144}{a^4}.\frac{9}{8}=\frac{162}{a^4}$ ។

៤. តាមបំរាប់យើងមាន $\forall x,y\in\mathbb{R}$ នោះ $\begin{cases} e^{f(x)}\geq e^x \\ \frac{e^{f(x+y)}}{e^{x+y}}\geq\frac{e^{f(x)+f(y)}}{e^{x+y}}=\frac{e^{f(x)}}{e^x}+\frac{e^{f(y)}}{e^y}\end{cases}$

តាង $g(x)=\frac{e^{f(x)}}{e^x},\ \forall x\in\mathbb{R}$

ពេលនោះ, $\forall x,y\in\mathbb{R}$ យើងបាន: $\begin{cases} g(x)\geq 1 \\ g(x+y)\geq g(x).g(y)\end{cases}$

ឲ្យ $x=y=0$ យើងបាន: $\begin{cases} g(0)\geq 1 \\ g(0)\geq g^2(0)\end{cases}\Rightarrow g(0)=1$

ម្យ៉ាងទៀត $1=g(0)=g(x-x)\geq g(x).g(-x)\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow 1\leq g(x)\leq\frac{1}{g(-x)}\leq 1\ \ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow g(x)=1\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

ពីនោះទាញបាន $f(x)=x\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ឡើងវិញ, យើងបាន $f(x)=x\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍ដែលត្រូវរក។

៥. យើងមាន:

$x^2-3xy+2y^2+24x-y\equiv 0\ (\text{mod } 23)\Leftrightarrow x^2-3xy+2y^2+x-y\equiv 0\ (\text{mod } 23)$

$\Leftrightarrow (x-y)(x-2y+1)\equiv 0\ (\text{mod } 23)\Rightarrow x\equiv y\ (\text{mod } 23)$ រឺ $x\equiv 2y-1\ (\text{mod } 23)$

$+$ ករណីទី១៖ បើ $x\equiv y\ (\text{mod } 23)$ នោះ: $x^2-2xy+y^2-5x+10y\equiv 5y\ (\text{mod } 23)$

ពីនោះបើ $x^2-2xy+y^2-5x+10y\equiv 0\ (\text{mod } 23)$ នោះ: $5y\equiv 0\ (\text{mod } 23)$ រឺ $y\equiv 0\ (\text{mod } 23)$

ដូចនេះ $x\equiv y\equiv 0\ (\text{mod } 23)\Rightarrow xy-12x+15y\equiv 0\ (\text{mod } 23)$

$+$ ករណីទី២៖ បើ $x\equiv 2y-1\ (\text{mod } 23)$ នោះ: $x^2-2xy+y^2-5x+10y\equiv y^2-2y+6\ (\text{mod } 23)$

និង $xy-12x+21y\equiv 2(y^2-2y+6)\ (\text{mod } 23)$

ពីនោះបើ $x^2-2xy+y^2-5x+10y\equiv 0\ (\text{mod } 23)$ គឺ $y^2-2y+6\equiv 0\ (\text{mod } 23)$

រឺ $xy-12x+21y\equiv 0\ (\text{mod } 23)$ (បញ្ហាត្រូវស្រាយបញ្ជាក់)

៦. ឧបមាថា $n=\sum_{i=1}^{2012}a_i$, ក្នុងនោះ $a_i\ (i=\overline{1,2012})$ ជាបណ្តាចំនួនពហុគុណ។

ពេលនោះតាមបំរាប់គេទាញបាន:

$a)\ \forall a_i\ (i=\overline{1,2012})$ មិនអាចបំបែកបានជា $a_i=a+b$ ក្នុងនោះ a,b ជាចំនួនពហុគុណ (1) ។

$b)$ ផលបូក $a_i+a_j\ (i\neq j; i,j=\overline{1,2012})$ មិនអាចបំបែកបានជា $a_i+a_j=a+b+c$ ក្នុងនោះ a,b,c ជាបណ្តាចំនួនពហុគុណ (2) ។

$+$ ដោយ n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិសេស នោះត្រូវមាន $a_i\ (i=\overline{1,2012})$ ណាមួយ ដែលជាចំនួនសេស។ ដោយមិនធ្វើឲ្យបាត់បង់លក្ខណៈទូទៅ ឧបមាថាចំនួននោះគឺ a_1 ។ សង្កេតឃើញថា បើ $a_1\geq 15$ គឺ $a_1=9+(a_1-9)$ ជាផលបូកនៃចំនួនពហុគុណពីរ $\Rightarrow$ មិនសមហេតុផលចំពោះ (1) ។ ដូចនេះ $a_1\leq 13$, ហើយដោយ a_1 ជាចំនួនពហុគុណនោះ $a_1=9$ ។

$+$ ម្យ៉ាងទៀត បើមាន $a_i\neq a_1, a_i=9$ នោះ $a_i+a_1=18=6+6+6$ ជាផលបូកនៃ 3 ចំនួនពហុគុណ

$\Rightarrow$ មិនសមហេតុផលចំពោះ (2) ។ ដូចនេះ $a_1 = 9$ ជាចំនួនពហុគុណសេសតែមួយគត់របស់ស្វ៊ីត (a_i), $i = \overline{1,2012}$, ពីនោះ នាំឲ្យ $\sum_{i=2}^{2012} a_i$ ជាផលបូកនៃគ្រប់ចំនួនពហុគុណគូ។

សង្កេតឃើញថាបើ $a_i \geq 8, i = \overline{2,2012}$ នោះ $a_i = 4 + (a_i - 4)$ ជាផលបូកនៃចំនួនពហុគុណពីរ

$\Rightarrow$ មិនសមហេតុផលចំពោះ (1) ។

ដូចនេះ $a_i \in \{4;6\}, i = \overline{2,2012}$ ។ ពីនោះ យើងបានពីរករណីខាងក្រោម:

$+$ បើមាន a_i ណាមួយនោះស្មើ 6, ដោយមិនធ្វើឲ្យបាត់លក្ខណៈទូទៅ ឧបមាថា $a_2 = 6$ ។ ពេលនោះបើមាន $a_k \neq a_2$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_k = 6\ (k = \overline{3,2012})$ នោះ $a_2 + a_k = 12 = 4+4+4 \Rightarrow$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ (2) ។

ដូចនេះ a_2 ជាចំនួនពហុគុណតែមួយគត់ស្មើ 6 របស់ស្វ៊ីត $(a_i), i = \overline{2,2012}$ ។

ពីនោះ $n = 9 + 6 + \sum_{i=1}^{2010} 4 = 8055$

$+$ បើ $a_i = 4, i = \overline{2,2012}$ នោះ $n = 9 + \sum_{i=1}^{2011} 4 = 8053$

ដូចនេះ សំនុំដែលត្រូវរកមានពីរចំនួនគឺ 8055 និង 8053 ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

វិញ្ញាសាស្នើទី២

១. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} x^3 = y^3 + 26384 \\ 2x^2 + 3y^2 + 4(9y - 4x) = 2012 \end{cases}$

២. គេឲ្យ a, b ជាពីរចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ ស្វ៊ីត (u_n) ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\begin{cases} u_1 = a, u_2 = b \\ u_{n+2} = 3\sqrt[5]{u_{n+1}} + 13\sqrt[5]{u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ស្វ៊ីត (u_n) មានលីមីតកំណត់ និងរក $\lim u_n$ ។

៣. គេឲ្យចតុកោណព្នាយ $ABCD$ មានបាតធំ CD, ចារឹកក្នុងរង្វង់ (O), H ជាចំនុចកណ្ដាលរបស់ CD ។ តាង I, J, K រៀងគ្នាជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងរបស់ $\Delta ADC, \Delta AHD$ និង ΔAHC ។ រង្វង់អង្កត់ផ្ចិត AI កាត់ (O) ត្រង់ Q និងកាត់ AB ត្រង់ P ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $PQ, (O)$ និងរង្វង់ (AKJ) កាត់តាមចំនុចរួមគ្នាមួយ។

៤. រកគ្រប់បណ្ដាអនុគមន៍ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់:

$$f(x - f(y)) = f(x) + f(f(y)) - 2xf(y) + 2012f(y) - 2013, \forall x, y \in \mathbb{R}$$ ។

៥. ពិនិត្យគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a, b, c ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a + 2011b = c$ (1) ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា គេអាចចែកសំនុំបណ្ដាចំនួនគត់វិជ្ជមានជា 2012 សំនុំរងយ៉ាងណាឲ្យ 3 ចំនួនណាក៏ដោយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ (1) នោះមានពីរចំនួនស្ថិតនៅក្នុងសំនុំរងតែមួយ។

៦. តើមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ចំនួនប៉ុន្មានផ្ទៀងផ្ទាត់ $n \leq a = 30^{30}$ ហើយ $n^2 - 1$ បឋមរវាងគ្នានឹង a ។

ចំលើយ

១. $\begin{cases} x^3 = y^3 + 26384 \\ 2x^2 + 3y^2 + 4(9y - 4x) = 2012 \end{cases} \quad (I)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 512 = y^3 + 25872 \\ 2x^2 - 16x = -3y^2 - 36y + 2012 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 512 - 12(2x^2 - 16x) = y^3 + 25872 - 12(-3y^2 - 36y + 2012) \\ 2x^2 - 16x = -3y^2 - 36y + 2012 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 24x^2 + 192x - 512 = y^3 + 36y^2 + 432y + 1728 \\ 2x^2 - 16x = -3y^2 - 36y + 2012 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-8)^3 = (y+12)^3 \\ 2x^2 - 16x = -3y^2 - 36y + 2012 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 8 = y + 12 \\ 2x^2 - 16x = -3y^2 - 36y + 2012 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 8 = y + 12 \\ 2x^2 - 16x = -3y^2 - 36y + 2012 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 20 \\ 2x^2 - 16x = -3(x-20)^2 - 36(x-20) + 2012 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 20 \\ 5x^2 - 100x - 1532 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 20 \\ x = 10 \pm 4\sqrt{\dfrac{127}{5}} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 + 4\sqrt{\dfrac{127}{5}} \\ y = -10 + 4\sqrt{\dfrac{127}{5}} \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x = 10 - 4\sqrt{\dfrac{127}{5}} \\ y = -10 - 4\sqrt{\dfrac{127}{5}} \end{cases}$

២. • ពិនិត្យស៊ីត (v_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} v_1 = v_2 = \min(a;b;32) \\ v_{n+2} = 3\sqrt[5]{v_{n+1}} + 13\sqrt[5]{v_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

• យើងស្រាយបញ្ជាក់ $v_n \le 32 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ (1) ដោយវិចារអនុមានរួមតាម n:

យើងមាន $v_1 = v_2 = \min(a;b;32) \Rightarrow v_1 \le 32, v_2 \le 32$ ។ ឧបមាថាមាន $v_n \le 32$ និង $v_{n+1} \le 32$ ។

ពេលនោះ $v_{n+2} = 3\sqrt[5]{v_{n+1}} + 13\sqrt[5]{v_n} \le 3\sqrt[5]{32} + 13\sqrt[5]{32} = 32$ ។ ដូចនេះ (1) ពិត។

• យើងស្រាយបញ្ជាក់ $v_n \le v_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ (2) ដោយវិចារអនុមានរួមតាម n:

យើងមាន $v_1 = v_2, v_3 = 3\sqrt[5]{v_2} + 13\sqrt[5]{v_1} = 16\sqrt[5]{v_2}$, $v_3 \ge v_2 \Leftrightarrow 16\sqrt[5]{v_2} \ge v_2 \Leftrightarrow v_2 \le 16^{\frac{5}{4}}$

$\Leftrightarrow v_2 \le 32$: ពិត (ព្រោះ $v_1 = v_2 = \min(a;b;32)$)

ឧបមាថាមាន $v_k \le v_{k+1}$ និង $v_{k+1} \le v_{k+2}$ $(k \in \mathbb{N}^*)$

ពេលនោះយើងបាន $v_{k+2} = 3\sqrt[5]{v_{k+1}} + 13\sqrt[5]{v_k} \le 3\sqrt[5]{v_{k+2}} + 13\sqrt[5]{v_{k+1}} = v_{k+3}$ ។

ដូចនេះ (2) ពិត។

តាម (1) & (2) ទាញបាន (v_n) ជាស៊ីតរួម ហើយតាមទំនាក់ទំនងរបស់ $(v_n) \Rightarrow \lim v_n = 32$ ។

• ពិនិត្យស៊ីត (w_n) ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\begin{cases} w_1 = w_2 = \max(a,b,32) \\ w_{n+2} = 3\sqrt[5]{w_{n+1}} + 13\sqrt[5]{w_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

• យើងស្រាយបញ្ជាក់ថា $w_n \ge 32 \ \forall n \in \mathbb{N}$ (3) ដោយវិចារអនុមានរួមតាម n:

យើងមាន $w_1=w_2=\max(a;b;32)\Rightarrow w_1\ge 32, w_2\ge 32$ ។

ឧបមាថា មាន $w_n\ge 32$ និង $w_{n+1}\ge 32$

ពេលនោះ $w_{n+2}=3\sqrt[5]{w_{n+1}}+13\sqrt[5]{w_n}\ge 16\sqrt[5]{32}=32$ ។ ដូចនេះ (3) ពិត។

• យើងស្រាយបញ្ជាក់ថា $w_n\ge w_{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$ (4) ដោយវិចារអនុមានរួមតាម n:

យើងមាន $w_1=w_2, w_3=3\sqrt[5]{w_2}+13\sqrt[5]{w_1}=16\sqrt[5]{w_2}$

$w_3\le w_2 \Leftrightarrow 16\sqrt[5]{w_2}\le w_2\Leftrightarrow 16\le w_2^{\frac{4}{5}}\Leftrightarrow 16^{\frac{5}{4}}\le w_2\Leftrightarrow 32\le w_2$ (ពិត)

ឧបមាថាមាន $w_{k+1}\le w_k$ និង $w_{k+2}\le w_{k+1}$ ។

ពេលនោះ $w_{k+3}=3\sqrt[5]{w_{k+2}}+13\sqrt[5]{w_{k+1}}\le 3\sqrt[5]{w_{k+1}}+13\sqrt[5]{w_k}=w_{k+2}$ ។ ដូចនេះ (4) ពិត

តាម (3) & (4) ទាញបាន (w_n) ជាស្វ៊ីតរួម ហើយតាមទំនាក់ទំនងរបស់ $(w_n)\Rightarrow \lim w_n=32$ ។

• យើងស្រាយបញ្ជាក់ថា $v_n\le u_n\le w_n \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$ (5) ដោយវិចារអនុមានរួមតាម n:

យើងមាន $u_1=a, u_2=b, v_1=v_2=\min(a;b;32)$ និង $w_1=w_2=\max(a;b;32)$

$\Rightarrow v_1\le u_1\le w_1, v_2\le u_2\le w_2$ ។

ឧបមាថាមាន $v_k\le u_k\le w_k$ និង $v_{k+1}\le u_{k+1}\le w_{k+1}$

ពេលនោះ $v_{k+2}=3\sqrt[5]{v_{k+1}}+13\sqrt[5]{v_k}\le 3\sqrt[5]{u_{k+1}}+13\sqrt[5]{u_k}=u_{k+2}\le 3\sqrt[5]{w_{k+1}}+13\sqrt[5]{w_k}=w_{k+2}$, គឺ (5) ពិត។

តាម (5) និងតាម $\lim v_n=\lim w_n=32\Rightarrow \lim u_n=32$ ។

៣. តាង M ជាចំនុចកណ្តាលរបស់ធ្នូតូច $\overset{\frown}{AB}$, យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់ថា PQ និង (AKJ) កាត់តាមចំនុច M ដូចគ្នា។

◦ តាង N ជាចំនុចនៅចំកណ្តាលរបស់ធ្នូ $\overset{\frown}{DC}$ មិនមានផ្ទុក A, យើងបាន $MN\perp AB$ ។

រង្វង់អង្កត់ផ្ចិត AI កាត់ AB ត្រង់ P នោះ $IP\perp AB$ ទាញបាន $IP\parallel MN$ (1)

◦ ចតុកោណ $APIQ$ ចារឹកក្នុងនោះ $\widehat{QPI}=\widehat{QAI}$,

AI ជាបន្ទាត់ពុះរបស់មុំ $\widehat{DAC}$ នោះ A, I, N ស្ថិត

នៅលើបន្ទាត់តែមួយ $\Rightarrow \widehat{QAI}=\widehat{QAN}$ ។

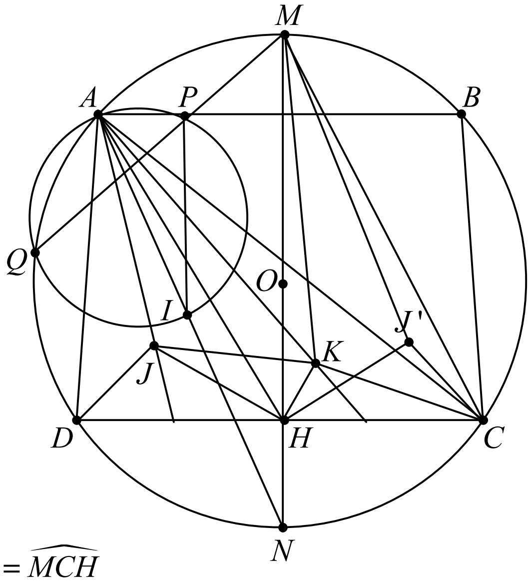
ចតុកោណ $QAMN$ ចារឹកក្នុង $\Rightarrow \widehat{QAN}=\widehat{QMN}$

ដូចនោះ $\widehat{QPI}=\widehat{QMN}$ (2)

តាម (1) និង (2) $\Rightarrow M, P, Q$ រត់ត្រង់ជួរគ្នា (*) ។

◦ តាង J' ជាចំនុចឆ្លុះរបស់ J ធៀបនឹង MN,

យើងបាន: $\widehat{JDH}=\widehat{J'CH}$



$$\Rightarrow \widehat{KCH}+\widehat{J'CH}=\widehat{KCH}+\widehat{JDH}=\frac{1}{2}\left(\widehat{ACH}+\widehat{ADH}\right)$$

$$=90^0-\frac{\widehat{DAC}}{2}=90^0-\frac{\widehat{DMC}}{2}=90^0-\widehat{CMH}=\widehat{MCH}$$

$\Rightarrow CJ'$ ឆ្លុះគ្នានិង CK ធៀបនឹងបន្ទាត់ពុះមុំរបស់ $\widehat{MCH}$ (3)

◦ $\widehat{JHD}=\widehat{J'HC}$

$$\Rightarrow \widehat{J'HC}+\widehat{KHC}=\widehat{JHD}+\widehat{KHC}=\frac{1}{2}\left(\widehat{AHD}+\widehat{AHC}\right)=90^0=\widehat{MHC}$$

$\Rightarrow HJ'$ ឆ្លុះគ្នានិង HK ធៀបនឹងបន្ទាត់ពុះរបស់មុំ $\widehat{MHC}$ (4)
តាម (3) & (4) ទាញបាន J'ជាចំនុច......... របស់ K ក្នុង ΔMHC ។

$$\Rightarrow \widehat{HMK} = \widehat{J'MC} \Rightarrow \widehat{HMK} + \widehat{HMJ'} = \widehat{J'MC} + \widehat{HMC} = \frac{\widehat{DMC}}{2} = \frac{\widehat{DAC}}{2} = \widehat{JAK}$$

តែដោយ $\widehat{HMJ'} = \widehat{HMJ} \Rightarrow \widehat{JMK} = \widehat{JAK} \Rightarrow AJKM$ ចារឹកក្នុង $\Rightarrow (AJK)$ កាត់តាម M (**)
តាម (*) & (**) ទាញបាន $PQ, (O)$ និង (AJK) កាត់តាមចំនុចរួមគ្នាគឺ M ។
បញ្ហាត្រូវស្រាយបញ្ជាក់។

៤. * ឧបមាថាអនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$f(x-f(y)) = f(x) + f(f(y)) - 2xf(y) + 2012f(y) - 2013 \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (*)$$

∘ តាង $A = f(R) = \{f(t)/t\in\mathbb{R}\}$ និង $a = f(0)$ ។
យក x ណាមួយស្ថិតនៅក្នុង $A \Rightarrow \exists y$ យ៉ាងណាឲ្យ $x = f(y)$ ។
ជំនួស x, y នេះចូលក្នុង (*) យើងបាន:

$$a = 2f(x) - 2x^2 + 2012x - 2013 \Rightarrow f(x) = x^2 - 1006x + \frac{a+2013}{2}, \quad \forall x\in A \quad (1)$$

∘ ក្នុង (*) ជំនួស $x = y = 0$ យើងបាន $f(-a) = f(a) + 2013a - 2013 \Rightarrow a \neq 0$ (2)
(ព្រោះបើ $a = 0$ នោះពីកន្សោមខាងលើទាញបាន $f(0) = f(0) - 2013$: មិនសមហេតុផល)
∘ ក្នុង (*) ជំនួស $y = 0$ យើងបាន $f(x-a) = f(x) + f(a) - 2ax + 2012a - 2013, \ \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow f(x-a) - f(x) = -2ax + f(a) + 2012a - 2013, \ \forall x\in\mathbb{R}$$

ដោយ $a \neq 0$ នោះដែនតំលៃរបស់ $g(x) = -2ax + f(a) + 2012a - 2013$ គឺ R ។

$$\Rightarrow \{f(x-a) - f(x)\} / x\in\mathbb{R} = \quad (3)$$

∘ យក x ណាមួយនៅក្នុង $\mathbb{R}$ ។ តាម (3) $\Rightarrow \exists z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ យ៉ាងណាឲ្យ $x = f(z_1) - f(z_2)$ ។
តាង $y_1 = f(z_1), y_2 = f(z_2)$ យើងបាន $x = y_1 - y_2 = y_1 - f(z_2)$ និង $y_1, y_2 \in A$ ។
ទាញបាន $f(y_1) = y_1^2 - 1006y_1 + \frac{a+2013}{2}, f(y_2) = y_2^2 - 1006y_2 + \frac{a+2013}{2}$ ។

$$\begin{aligned} f(x) = f(y_1 - f(z_2)) &= f(y_1) + f(f(z_2)) - 2y_1 f(z_2) + 2012f(z_2) - 2013 \\ &= f(y_1) + f(y_2) - 2y_1y_2 + 2012y_2 - 2013 \\ &= y_1^2 - 1006y_1 + \frac{a+2013}{2} + y_2^2 - 1006y_2 + \frac{a+2013}{2} - 2y_1y_2 + 2012y_2 - 2013 \\ &= (y_1 - y_2)^2 - 1006(y_1 - y_2) + a = x^2 - 1006x + a \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 - 1006x + a, \forall x\in\mathbb{R} \quad (4)$$

∘ យក x ណាមួយនៅក្នុង A, តាម (1) និង (4), យើងបាន:

$$f(x) = x^2 - 1006x + \frac{a+2013}{2} = x^2 - 1006x + a \Rightarrow a = 2013$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 - 1006x + 2013, \ \forall x\in\mathbb{R}$$

* ផ្ទុយមកវិញ ចំពោះ $f(x) = x^2 - 1006x + 2013$, យើងបាន:

$$f(x) + f(f(y)) - 2xf(y) + 2012f(y) - 2013 =$$

$$= x^2 - 1006x + 2013 + f(y)^2 - 1006f(y) + 2013 - 2xf(y) + 2012f(y) - 2013$$

$=[x-f(y)]^2-1006[x-f(y)]+2013=f(x-f(y))$

ដូចនេះ $f(x)=x^2-1006x+2013,\ \forall x\in\mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍ដែលត្រូវរក។

៥. ឧបមាថា a,b,c ជាបីចំនួនគត់វិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ (1) ។

តាង $a=a'.2^m, b=b'.2^n, c=c'.2^p$ ចំពោះ a',b',c' ជាបណ្ដាចំនួនគត់វិជ្ជមានសេសនិង $m,n,p\in\mathbb{N}$ ។

យើងស្រាយបញ្ជាក់ថា ក្នុងបីចំនួន m,n,p មានយ៉ាងតិចពីរចំនួនស្មើគ្នា។

ពិតជាដូចនេះ៖

បើ $m>n\Rightarrow c'.2^p=c=a+2001b=a'.2^m+2011b'.2^n=2^n(2^{m-n}a'+2011b')$

ដោយ c' និង $2^{m-n}a'+2011b'$ ជាបណ្ដាចំនួនគត់វិជ្ជមានសេស ($2^{m-n}a'$ ជាចំនួនគូ, $2011b'$ ជាចំនួនសេស)

$\Rightarrow p=n$ ។

បើ $n>m\Rightarrow c'.2^p=c=a+2011b=a'.2^m+2011b'.2^n=2^m(a'+2011b'2^{n-m})$

ដោយ c' និង $a'+2011b'.2^{n-m}$ ជាបណ្ដាចំនួនគត់វិជ្ជមានសេស $\Rightarrow p=m$ ។

ដូចនេះ ត្រូវមាន $m=n$ ឬ $m=p$ ។

តាង $v_2(x)$ ជាចំនួនស្វ័យគុណនៃ 2 ក្នុងការបំបែកចំនួនគត់វិជ្ជមាន x ទៅជាផលគុណកត្តាបឋម

យើងចែកសំនុំបណ្ដាចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbb{N}^*$ ទៅជា 2012 សំនុំរង

$$A_k=\{x\in\mathbb{N}^* / v_2(x)\equiv k\ (\text{mod } 2012)\},\ k=0,1,2,...,2011$$

តាមការបកស្រាយខាងលើ ចំពោះ a,b,c ជា 3 ចំនួនគត់វិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ (1)

យើងបាន $v_2(a)=v_2(b)$ ឬ $v_2(b)=v_2(c)$ ឬ $v_2(c)=v_2(a)\Rightarrow$ បញ្ហាត្រូវស្រាយបញ្ជាក់។

៦. យើងមាន $30=2.3.5$, ដូចនោះ n^2-1 បឋមរវាងគ្នានឹង a

$\Leftrightarrow n^2-1$ មិនមានសំនល់រួមនឹង 0 (mod 2), (mod 3), (mod 5)

$\Leftrightarrow n$ មិនមានសំនល់រួមនឹង $1\,(mod\ 2)$, មិនមានសំនល់រួមនឹង 1, នឹង $2\,(mod\ 3)$, មិនមានសំនល់រួម នឹង 1, នឹង 4 (mod 5) ។

តាង S ជាសំនុំនៃគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ចំពោះ $n\le a=30^{30}$,

$$A=\{n\in S / n\equiv 1\ (\text{mod } 2)\}$$

$$B=\{n\in S / n\equiv 1 \quad n\equiv 2\ (\text{mod } 3)\}$$

$$C=\{n\in S / n\equiv 1 \quad n\equiv 4\ (\text{mod } 5)\}$$

យើងត្រូវរក $|S\setminus(A\cup B\cup C)|$ ។

យើងមាន: $A\cap B=\{n\in S / n\equiv 1$ ឬ $n\equiv 5\ (\text{mod } 6)\}$

$B\cap C=\{n\in S / n\equiv 1$ ឬ $n\equiv 4$ ឬ $n\equiv 11$ ឬ $n\equiv 14\ (\text{mod } 15)\}$,

$C\cap A=\{n\in S / n\equiv 1$ ឬ $n\equiv 9\ (\text{mod } 10)\}$

$A\cap B\cap C=\{n\in S / n\equiv 1$ ឬ $n\equiv 11$ ឬ $n\equiv 19$ ឬ $n\equiv 29\ (\text{mod } 30)\}$

$$\Rightarrow |S|=a, |A|=\frac{a}{2}, |B|=\frac{2a}{3}, |C|=\frac{2a}{5}, |A\cap B|=\frac{2a}{6}=\frac{a}{3}$$

$$|B\cap C|=\frac{4a}{15}, |C\cap A|=\frac{2a}{10}=\frac{a}{5}, |A\cap B\cap C|=\frac{4a}{30}=\frac{2a}{15}$$

ដោយ $|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|C\cap A|+|A\cap B\cap C|$

$$=\frac{a}{2}+\frac{2a}{3}+\frac{2a}{5}-\frac{a}{3}-\frac{4a}{15}-\frac{a}{5}+\frac{2a}{15}+\frac{9a}{10}$$

ដូចនេះ $|S\setminus(A\cup B\cup C)|=a-\frac{9a}{10}=\frac{a}{10}$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

វិញ្ញាសាស្នើទី៣

១. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ: $\begin{cases}(x+y)^3+\dfrac{3}{x+y}=4\\ \dfrac{x^4-y^4}{64}+\dfrac{9(x^2-y^2)}{32}+\dfrac{7(x-y)}{8}+\ln\left(\dfrac{x-3}{y-3}\right)^3=0\end{cases}$

២. គេឲ្យស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_n=\frac{(2n)!}{(n!)^2.2^{2n}}$ ។ គណនា $\lim\frac{1}{\ln n}\left(\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+...+\frac{a_n}{n}\right)$ ។

៣. គេឲ្យបញ្ចកោណប៉ោង $ABCDEF$ ចារឹកក្នុងរង្វង់ $(O;R)$ មាន AB, CD, EF ស្មើកាំ R របស់រង្វង់។ តាង M, N, P រៀងគ្នាជាចំនុចកណ្តាលរបស់ BC, DE, AF ។ គណនារង្វាស់មុំ $\widehat{MPN}$ ។

៤. រកគ្រប់បណ្តាអនុគមន៍ $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{Q}^+$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ:

$$f(x)+f(y)+2xyf(xy)=\frac{f(xy)}{f(x+y)};\ \forall x, y\in\mathbb{Q}^+$$ ។

៥. តើមានប្រព័ន្ធចំនួនគត់វិជ្ជមាន (a,b,c,d) ចំនួនប៉ុន្មានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់: $(a+b+c)^2+32=3^d$ ។

៦. គេឲ្យ n សំនុំ $A_1, A_2, ..., A_n$ $(n\in\mathbb{Z}^+)$ ខុសពីសំនុំទទេ, ផ្សេងគ្នា យ៉ាងណាឲ្យពេលជ្រើសរើសយក $k\in\{1;2;3;...;n\}$ នោះ $\forall i, j\neq k$ គេបាន $A_i\cup A_j=A_k$ $(i;j\in\{1;2;3;...;n\})$ ។
គេតាង $|A|$ ជាចំនួនធាតុរបស់សំនុំ A ។ ដោយដឹងថា $|A_1|\le 2$ ។
ស្រាយបញ្ជាក់ថា មានធាតុ x ដែលស្ថិតនៅក្នុងយ៉ាងតិច $\frac{n}{2}$ សំនុំ ក្នុងចំណោមបណ្តាសំនុំ $A_1, A_2, ..., A_n$ ។

ចំលើយ

១. លក្ខខណ្ឌ $\frac{x-3}{y-3}>0\wedge x+y\neq 0$

សមីការដំបូងរបស់សមីការសមមូលនឹង $(x+y)^4+3=4(x+y)$

តាមវិសមភាព *Cauchy* យើងមាន:

$$(x+y)^4+1+1+1\ge 4\sqrt[4]{(x+y)^4.1.1.1}=4|x+y|\ge 4(x+y)$$

ដូចនេះ សមីការដំបូងសមមូលនឹង $x+y=1$ (*)

ពីនោះ បូករួមនឹងលក្ខខណ្ឌ $\frac{x-3}{y-3}>0\Rightarrow -2<x, y<3$ ។

សមីការទីពីររបស់ប្រព័ន្ធ $\Leftrightarrow\frac{x^4}{64}+\frac{9x^2}{32}+\frac{7x}{8}+3\ln(3-x)=\frac{y^4}{64}+\frac{9y^2}{32}+\frac{7y}{8}+3\ln(3-y)$

ពិនិត្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x^4}{64}+\frac{9x^2}{32}+\frac{7x}{8}+3\ln(3-x)$ (ចំពោះ $x<3$)

$$f'(x)=\frac{x^3}{16}+\frac{9x}{16}+\frac{7}{8}+\frac{3}{x-3}=\frac{(x^3+9x+14)(x-3)+48}{16(x-3)}$$

$$= \frac{x^4-3x^3+9x^2-13x+6}{16(x-3)} = \frac{(x-1)^2(x^2-x+6)}{16(x-3)} \le 0 \quad (\text{ព្រោះ } x<3)$$

ទាញបាន អនុគមន៍ចុះនៅលើ $(-2;3)$, ដូចនេះ $f(x)=f(y) \Leftrightarrow x=y$ $(**)$

តាម $(*), (**)$ យើងបាន $x=y=\frac{1}{2}$ (ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ)។

២. យើងមាន: $a_n = \frac{1.2.3.\dots.2n}{(2.4.6.\dots.2n)^2} = \frac{1.3.5.\dots.(2n-1)}{2.4.6.\dots.2n}$

$$\Rightarrow a_n^2 = \frac{1^2.3^2.5^2.\dots.(2n-1)^2}{2^2.4^2.6^2.\dots.(2n)^2} < \frac{1^2.3^2.5^2.\dots.(2n-1)^2}{(2^1-1).(4^2-1).(6^2-1)\dots(2n^2-1)}$$

$$= \frac{1.3.5.\dots.(2n-1)}{1.3.3.5.\dots.(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n+1}$$

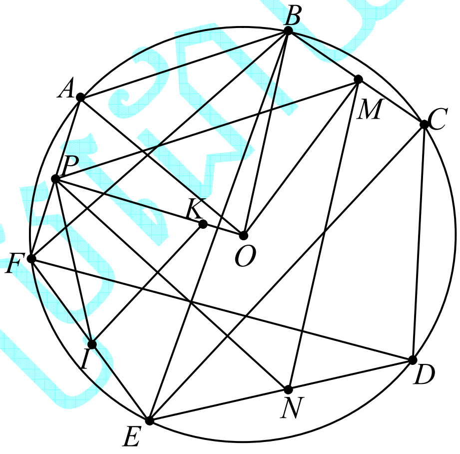
ពីនោះយើងបាន: $0 < a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \Rightarrow \lim a_n = 0$

ពិនិត្យស្វ៊ីត $x_n = \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \dots + \frac{a_n}{n}$, $y_n = \ln n$

យើងបាន $\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim \frac{\frac{a_n}{n}}{\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)} = \lim \frac{a_n}{\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} = 0$

តាមទ្រឹស្តីបទ *Stolz* យើងបាន $\lim \frac{x_n}{y_n} = 0 \Rightarrow \lim \frac{1}{\ln n}\left(\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\dots+\frac{a_n}{n}\right) = 0$

៣.



+ តាង K ជាចំនុចកណ្តាលរបស់ BE; I ជាចំនុចកណ្តាលរបស់ EF ។

$$Q_0^{60} : B \mapsto A; F \mapsto E \Rightarrow \overrightarrow{BF} \to \overrightarrow{AE}$$

តាមលក្ខណៈរបស់បាតមធ្យមយើងទាញបាន $PI = IK$ និង PI កាត់ IK តាមមុំស្រួច $60^0 \Rightarrow \Delta PIK$ ជាត្រីកោណសម័ង្ស $\Rightarrow Q_P^{60^0} : I \to K$ $(*)$

យើងក៏មាន: $Q_O^{60^0} : F \to E; D \to C \Rightarrow \overrightarrow{FD} \to \overrightarrow{EC}$

តាមលក្ខណៈរបស់បាតមធ្យមយើងទាញបាន $IN = KM$ និង IN កាត់ KM តាមមុំស្រួច 60^0 $(**)$

តាម $(*)\,\&\,(**)$ ទាញបាន $Q_P^{60^0} : N \to M \Rightarrow \Delta PMN$ ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

ដូចនេះ: $\widehat{MPN} = 60^0$ ។

៤. ជំហានទី១) ស្រាយបញ្ជាក់ $f(1)=1$

ឲ្យ $y=1$ ចូលក្នុងបំរាប់ $f(x)+f(y)+2xyf(xy)=\dfrac{f(xy)}{f(x+y)}$ (1)

និងតាង $f(1)=a$ យើងបាន:

$$f(x)+a+2xf(x)=\frac{f(x)}{f(x+1)}\Rightarrow f(x+1)=\frac{f(x)}{(1+2x)f(x)+a} \qquad (2)$$

ទាញបាន $f(2)=\dfrac{a}{4a}=\dfrac{1}{4};\ f(3)=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}+a}=\dfrac{1}{5+4a};\ f(4)=\dfrac{1}{7+5a+4a^2}$

ម្យ៉ាងទៀត, ឲ្យ $x=y=2$ ចូលក្នុង (1)

$$\Rightarrow 2f(2)+8f(4)=\frac{f(4)}{f(4)}=1\Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{8}{7+5a+4a^2}=1\Rightarrow a=1$$

ជំហានទី២) ស្រាយបញ្ជាក់ $f(x+n)=\dfrac{f(x)}{\left(n^2+2nx\right)f(x)+1}\quad \forall n=1,2,\ldots$ (3)

តាម (2) ទាញបាន (3) ពិតចំពោះ $n=1$ ។

ឧបមាថា (3) ពិតចំពោះ $n=k$ ។

ពិនិត្យ $f(x+k+1)=\dfrac{f(x+k)}{\left(1+2(x+k)\right)f(x+k)+1}=\dfrac{\dfrac{f(x)}{\left(k^2+2kx\right)f(x)+1}}{\left(\dfrac{(1+2(x+k))f(x)}{\left(k^2+2kx\right)f(x)+1}\right)}$

$$=\frac{f(x)}{\left((k+1)^2+2(k+1)x\right)f(x)+1}$$

ដូចនេះ (3) ពិតពេល $n=k+1\Rightarrow$ (3) ពិតពេល n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

ជំហានទី៣) ស្រាយបញ្ជាក់ $f(q)=\dfrac{1}{q^2}$ ចំពោះ $q=\dfrac{n}{m};n,m$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាននិង $(m,n)=1$

តាម (3) យើងបាន $f(n+1)=\dfrac{f(1)}{(n^2+2n)f(1)+1}=\dfrac{1}{(n+1)^2}$ រឺ $f(n)=\dfrac{1}{n^2}\quad \forall n=1,2,\ldots$

ក្នុង (3) ជំនួស $x=\dfrac{1}{n}\Rightarrow f\left(n+\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{f\left(\dfrac{1}{n}\right)}{\left(n^2+2\right)f\left(\dfrac{1}{n}+1\right)}$

ឲ្យ $y=\dfrac{1}{x}$ ចូលក្នុង (1) $\Rightarrow f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)+2=\dfrac{1}{f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}$

ដូចនេះ: $f(n)+f\left(\dfrac{1}{n}\right)+2=\dfrac{1}{f\left(n+\dfrac{1}{n}\right)}=n^2+2+\dfrac{1}{f\left(\dfrac{1}{n}\right)}$

ដោយ $f(n)=\dfrac{1}{n^2}\Rightarrow f\left(\dfrac{1}{n}\right)=n^2$ (បញ្ហាត្រូវស្រាយបញ្ជាក់)

ជំនួស $x=n,\ y=\dfrac{1}{m}$ ចូលក្នុង (1) យើងបាន: $f\left(\dfrac{1}{m}\right)+f(n)+\dfrac{2n}{m}f\left(\dfrac{n}{m}\right)=\dfrac{f\left(\dfrac{n}{m}\right)}{f\left(n+\dfrac{1}{m}\right)}$

ឲ្យ $x=\dfrac{1}{m}$ ចូលក្នុង (3) យើងបាន: $f\left(n+\dfrac{1}{m}\right)=\dfrac{f\left(\dfrac{1}{m}\right)}{\left(n^2+\dfrac{2n}{m}\right)f\left(\dfrac{1}{m}\right)+1}=\dfrac{1}{n^2+\dfrac{2n}{m}+\dfrac{1}{m^2}}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{n^2}+m^2+\dfrac{2n}{m}f\left(\dfrac{n}{m}\right)=\left(n+\dfrac{1}{m}\right)f\left(\dfrac{n}{m}\right)$

ដូចនេះ $f(q)=f\left(\dfrac{n}{m}\right)=\dfrac{\dfrac{1}{n^2}+m^2}{n^2+\dfrac{1}{m^2}}=\left(\dfrac{m}{n}\right)^2=\dfrac{1}{q^2}$ ។ ផ្ទៀងផ្ទាត់ឡើងវិញឃើញថាពិត។

៥. ឧបមាថា (a,b,c,d) ជាប្រព័ន្ធ 4 ចំនួនគត់វិជ្ជមានយ៉ាងណាឲ្យ $(a+b+c)^2+32=3^d$ (*)

យើងឃើញថា $(a+b+c)^2\equiv 0\ (\text{mod } 4)$ រឺ $(a+b+c)^2\equiv 1\ (\text{mod } 4)$

$\Rightarrow (a+b+c)^2+32\equiv 0\ (\text{mod } 4)$ រឺ $(a+b+c)^2+32\equiv 1\ (\text{mod } 4)$

បើ d សេស $(k=2k+1)$ នោះ: $3^d=3.9^k\equiv 3\ (\text{mod } 4)$ ។ ពេលនោះ: (*) មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះ: $d=2f\ (f\in\mathbb{N}^*)$ ពេលនោះ:

$\Rightarrow 32=(3^f-a-b-c)(3^f+a+b)$

$\Rightarrow 3^f-a-b=2^m;\ 3^f+a+b=2^n;\ m+n=5\ (m,n\in\mathbb{N}, m<n)$

$\Rightarrow 2.3^f=2^n+2^m=2^m(2^{n-m}+1)$

$\Rightarrow m=1$ និង $3^f=2^{n-1}+1$ តែដោយ $5=m+n\Rightarrow n=4$ និង $f=2$

ពេលនោះ: $d=4$ និង $a+b+c=7$ (**)

ដោយ $1\le a\le 5$ នោះ: (**) មាន 15 ឫសជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

ដូចនេះ: មាន 15 ប្រព័ន្ធ 4 ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $(a;b;c;d)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ប្រធាន។

៦. យើងពិនិត្យករណីពីរខាងក្រោម:

ករណីទី១: $|A_1|=1\Rightarrow A_1=\{x\}$

តាង: T: ជាគ្រប់សំនុំ (ក្នុង $A_1, A_2, ..., A_n$) មិនមានផ្ទុក x

T_x: ជាគ្រប់សំនុំ (ក្នុង $A_1, A_2, ..., A_n$) មានផ្ទុក x

$\Rightarrow |T|+|T_x|=n$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $\forall A_i\in T$ នោះ: $A_1\cup A_i=A_k$ មានផ្ទុក x

ទាញបាន $|T|\le|T_x|\Rightarrow|T_x|\ge\dfrac{n}{2}\Rightarrow x$ ជាធាតុដែលត្រូវរក។

ករណីទី២: $|A_1|=2\Leftrightarrow A_1=\{x,y\}$

តាង: T: ជាគ្រប់សំនុំ (ក្នុង $A_1, A_2, ..., A_n$) មិនមានផ្ទុកទាំង x, y

T_x: ជាគ្រប់សំនុំ (ក្នុង $A_1, A_2, ..., A_n$) មានផ្ទុក x តែមិនមានផ្ទុក y

T_y: ជាគ្រប់សំនុំ (ក្នុង $A_1, A_2, ..., A_n$) មិនមានផ្ទុក x តែមានផ្ទុក y

T_{xy} : ជាគ្រប់សំនុំ (ក្នុង $A_1, A_2, ..., A_n$) មានផ្ទុកទាំង x និង y

$\Rightarrow |T|+|T_x|+|T_y|+|T_{xy}|=n$

តាមបំរាប់ $A_1 \cup A_i = A_k$ មានផ្ទុកទាំង x, y

$\Rightarrow |T_x| \le |T_{xy}|, |T_y| \le |T_{xy}|, |T| \le |T_{xy}|$

បើ $|T_x| \le |T_y| \Rightarrow |T_x|+|T| \le |T_y|+|T_{xy}| \Rightarrow |T_y|+|T_{xy}| \ge \dfrac{n}{2} \Rightarrow y$ ជាធាតុដែលត្រូវរក។

បើ $|T_y| \le |T_x| \Rightarrow |T_y|+|T| \le |T_x|+|T_{xy}| \Rightarrow |T_x|+|T_{xy}| \ge \dfrac{n}{2} \Rightarrow x$ ជាធាតុដែលត្រូវរក។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

វិញ្ញាសាស្នើទី៤

១. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ: $\begin{cases}(3x+y)(x+3y)\sqrt{xy}=14\\(x+y)(x^2+14xy+y^2)=36\end{cases}$

២. ពិនិត្យស្វ៊ីត (u_n) ឲ្យដោយ $u_n=\dfrac{n+1}{2^{n+1}}\left(\dfrac{2^1}{1}+\dfrac{2^1}{2}+...+\dfrac{2^n}{n}\right), n=1,2,3,...$

ស្រាយបញ្ជាក់ថាស្វ៊ីត (u_n) មានលីមីតកំណត់ និងរកលីមីតនោះ។

៣. គេឲ្យប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ មាន $AB=a, AD=1, \widehat{BAD}=\alpha$, ត្រីកោណ ABD មានគ្រប់មុំទាំងអស់ជាមុំស្រួច។ ចូរបង្ហាញថា គ្រប់រង្វង់ដែលមានកាំស្មើ 1 មានផ្ចិតរៀងគ្នាគឺ A, B, C, D និងគ្របដណ្ដប់ផិតប្រលេឡូក្រាមនេះបើ: $\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha \ge a$ ។

៤. រកអនុគមន៍ $f:\mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ ផ្ទៀងផ្ទាត់: $\forall x \in \mathbb{Q}^+$ គេបាន: $\begin{cases}f(x+1)=f(x)+1\\f(x^2)=[f(x)-1]^2+1\end{cases}$

៥. រកឬសជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ របស់សមីការ: $2^y=x^3+x^2+x+1$ ។

៦. ពិនិត្យតារាងប្រឡោះការេ 4×4 ។ គេបំពេញចូលក្នុងប្រឡោះនីមួយៗ របស់តារាងនូវចំនួនមួយក្នុងពីរចំនួន 1 រឺ -1 យ៉ាងណាឲ្យ ផលបូកគ្រប់ចំនួនក្នុងជួរដេកនីមួយៗ និងផលបូកគ្រប់ចំនួនក្នុងជួរឈរនីមួយៗ ស្មើនឹង 0 ។ តើមានប៉ុន្មានរបៀប?

ចំលើយ

១. ប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases}(3x+y)(x+3y)\sqrt{xy}=14 \quad (1)\\(x+y)(x^2+14xy+y^2)=36 \quad (2)\end{cases}$

តាង $\sqrt{x}=u\ge0; \sqrt{y}=v\ge0$, យើងបាន:

$$(1),(2) \Leftrightarrow \begin{cases}uv(3u^4+10u^2v^2+3v^4)=14\\u^6+15u^4v^2+15u^2v^4+v^6=36\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3u^5v+10u^3v^3+3uv^5=14\\u^6+15u^4v^2+15u^2v^4+v^6=36\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}36+2.14=u^6+6u^5v+15u^4v^2+20u^3v^3+15u^2v^4+6uv^5+v^6\\36-2.14=u^6-6u^5v+15u^4v^2-20u^3v^3+15u^2v^4-6uv^5+v^6\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(u+v)^6 = 64 = 2^6\\ (u-v)^6 = 8 = \left(\sqrt{2}\right)^6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u+v=2\\ u-v=\sqrt{2}\end{cases} \vee \begin{cases}u+v=2\\ u-v=-\sqrt{2}\end{cases}$$ (ព្រោះ $u,v\geq 0$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases}u=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ v=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases} \vee \begin{cases}u=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ v=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធមានបណ្តាចំលើយ: $\left(\dfrac{3}{2}+\sqrt{2};\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}\right)$ និង $\left(\dfrac{3}{2}-\sqrt{2};\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$

២. ច្បាស់ណាស់: $u_n > 0, \forall n\in \mathbb{N}^*$

យើងមាន: $u_{n+1} = \dfrac{n+2}{2^{n+2}}\left(\dfrac{2^1}{1}+\dfrac{2^2}{2}+\ldots+\dfrac{2^{n+1}}{n+1}\right) = \dfrac{n+2}{2(n+1)}(u_n+1)$ $\quad (*)$

នោះ $u_{n+2}-u_{n+1} = \dfrac{(n+2)^2(u_{n+1}-u_n)-(u_n+1)}{2(n+1)(n+2)}$, $n=1,2,3,\ldots$

ដោយ $u_n>0, \forall n\in\mathbb{N}^*$ នោះបើ $u_{n+1}-u_n\leq 0$ នាំឲ្យ $u_{n+2}-u_{n+1}\leq 0$

តែ $u_3=\dfrac{5}{3}$ និង $u_4=\dfrac{5}{3}$, មានន័យថា $u_4-u_3=0$

ដូចនោះ $u_5-u_4\leq 0, u_6-u_5\leq 0, \ldots, u_{n+1}-u_n\leq 0$

បង្ហាញថា, ស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតចុះចំពោះគ្រប់ $n\geq 3$ ។

ដោយវាទាល់ក្រោមដោយ 0 ។ ដូចនោះ, ស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតរួម។

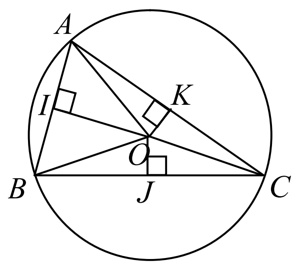
តាង $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ ។

តាមទំនាក់ទំនង $(*)$, បំលែងតាមលីមីតយើងបាន: $a=\dfrac{1}{2}(a+1)\Leftrightarrow a=1$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ ។

៣. ដំបូង, យើងស្រាយបញ្ជាក់ *Lemma* ខាងក្រោម:

Lemma: តាង O ជាផ្ចិតហើយ R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC ។ ពេលនោះ, បណ្តារង្វង់ផ្ចិត A, B, C ដែលមានកាំស្មើ x និងគ្របជិតត្រីកោណ ABC បើនិងមានតែបើ $x\geq R$ ។



សំរាយបញ្ជាក់ *Lemma*:

1/ លក្ខខណ្ឌចាំបាច់: បណ្តារង្វង់ផ្ចិត A,B,C មានកាំស្មើ x គ្របដណ្តប់ $\Delta ABC \Rightarrow$ បណ្តារង្វង់នេះត្រូវគ្របដណ្តប់ $O \Rightarrow x\geq R$ ។

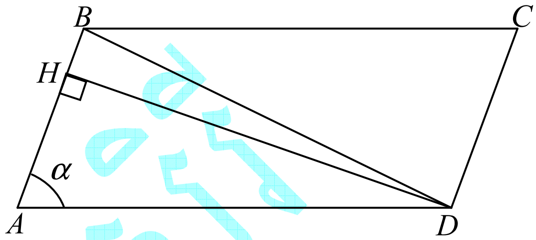
2/ លក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់: ផ្ទុយមកវិញ, ឧបមាថា $x\geq R$ ចំពោះ (O,R) ជារង្វង់ចារឹកក្រៅ ΔABC ។ យើងពិនិត្យបណ្តារង្វង់ផ្ចិត A,B,C មានកាំស្មើ R ។

ពេលនោះ, តាង I,J,K រៀងគ្នាជាចំណោលកែងរបស់ O ទៅលើ AB, BC, CA នោះរង្វង់ផ្ចិត A កាំ R នឹងគ្របដណ្តប់ចតុកោណ $OIAK$ ។ ដូចគ្នាដែរ រង្វង់

ផ្ចិត B, C កាំស្មើ R រៀងគ្នានឹងគ្របដណ្តប់ជិតចតុកោណ $OIBJ, OJCK$ ។ ដូចនោះ បណ្តារង្វង់ផ្ចិត A, B, C កាំស្មើ R គ្របដណ្តប់ជិត ΔABC ។

តាមបំរាប់យើងមាន $x\geq R$ នោះ ជាក់ស្តែងបណ្តារង្វង់ផ្ចិត A,B,C កាំស្មើ x គ្របដណ្តប់ជិត ΔABC ។

លក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់។
សំរាយបញ្ជាក់លំហាត់:
បណ្តារង្វង់ផ្ចិត A, C, B, D កាំស្មើ 1គ្របជិតប្រលេឡូក្រាម $ABCD \Leftrightarrow$ 3រង្វង់ផ្ចិត A, B, D កាំស្មើ1គ្រប ជិតត្រីកោណ ΔABD ។
តាង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ ΔABD, អនុវត្តន៍ *Lemma* ខាងលើ យើងបានលក្ខខណ្ឌចាំបាច់នឹងគ្រប់គ្រាន់ ដើម្បីឲ្យ 3រង្វង់ឯកតាផ្ចិត A, B, D គ្របជិតΔABD គឺ $R \le 1$។



យើងមាន: $BD = 2R\sin\alpha$ និង $BD^2 = a^2 + 1 - 2a\cos\alpha$
នោះ: $4R^2\sin^2\alpha = a^2 + 1 - 2a\cos\alpha$
ដូចនោះ: $4\sin^2\alpha \ge a^2 + 1 - 2a\cos\alpha$ (ព្រោះ $1 \ge R$)
$\Leftrightarrow 3\sin^2\alpha \ge a^2 + 1 - 2a\cos\alpha + \cos^2\alpha - 1$
$\Leftrightarrow 3\sin^2\alpha \ge a^2 - 2a\cos\alpha + \cos^2\alpha \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin\alpha \ge |a - \cos\alpha|$
(ដោយ ΔABD ជាត្រីកោណស្រួចនោះយើងបាន $AB > AH = \cos\alpha \Leftrightarrow a > \cos\alpha$)
$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin\alpha \ge a - \cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha \ge a$ ។

៤. ដោយ $f(x+1) = f(x) + 1 \ \forall x \in \mathbb{Q}^+$ (បំរាប់)
នោះ: $f(x+n) = f(x) + n \ \forall x \in \mathbb{Q}^+, \ \forall n \in \mathbb{N}^+$ (1)
(ស្រាយបញ្ជាក់បានដោយងាយ តាមវិចារអនុមានរួម)
$\forall x \in \mathbb{Q}^+$ តាង $x = \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{N}^+$, យើងបាន: $f\left[\left(\frac{p}{q}+q\right)^2\right] = \left[f\left(\frac{p}{q}\right)+q-1\right]^2 + 1$ (បំរាប់)

$\Leftrightarrow f\left(\frac{p^2}{q^2} + 2p + q^2\right) = \left[f\left(\frac{p}{q}\right) + q - 1\right]^2 + 1$ (តាម (1))

$\Leftrightarrow f\left[\left(\frac{p}{q}\right)^2\right] + 2p + q^2 = f^2\left(\frac{p}{q}\right) + 2(q-1)f\left(\frac{p}{q}\right) + (q-1)^2 + 1$ (តាម (1))

$\Leftrightarrow \left[f\left(\frac{p}{q}\right) - 1\right]^2 + 1 + 2p + q^2 = f^2\left(\frac{p}{q}\right) + 2qf\left(\frac{p}{q}\right) - 2f\left(\frac{p}{q}\right) + q^2 - 2q + 2$ (តាមបំរាប់)

$\Leftrightarrow f^2\left(\frac{p}{q}\right) - 2f\left(\frac{p}{q}\right) + 2 + 2p + q^2 = f^2\left(\frac{p}{q}\right) + 2qf\left(\frac{p}{q}\right) - 2f\left(\frac{p}{q}\right) + q^2 - 2q + 2$

$\Leftrightarrow 2qf\left(\frac{p}{q}\right) = 2p + 2q \Leftrightarrow f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} + 1$

ដូចនេះ: $f(x) = x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{Q}^+$ ។
ផ្ទៀងផ្ទាត់ឡើងវិញយើងបាន $f(x) = x + 1 \ \forall x \in \mathbb{Q}^+$ ជាអនុគមន៍ដែលត្រូវរក។

៥. យើងមាន $2^y = x^3 + x^2 + x + 1 \Leftrightarrow 2^y = (x^2+1)(x+1)$
ទាញបាន $(x^2+1), (x+1)$ ជាបណ្តាតួចែកបឋមរបស់ 2^y ។

ដូចនោះ យើងបាន: $\begin{cases} x + 1 = 2^m & (1) \\ x^2 + 1 = 2^n & (2) \\ m + n = y \end{cases} \qquad (m, n \in \mathbb{N})$

តាម $(1)\&(2)$ ទាញបាន $(2^m-1)^2+1=2^n \Leftrightarrow 2^{2m}-2.2^m+2=2^n \quad (3)$

បើ $m\ge 2$ នោះ 2^{2m} និង 2^{m+1} ចែកដាច់នឹង 4 នោះតាម (3) នាំឲ្យ 2^n ចែកនឹង 4 បានសំនល់ស្មើ 2 ។

ម្យ៉ាងទៀត, $m\ge 2$ នោះតាម (1) ទាញបាន $x\ge 3$, តាម (2) ទាញបាន $2^n=x^2+1\ge 3^2+1=10$

នោះ $n\ge 4$, ដូចនោះ $2^n \vdots 4$ (មិនផ្ទៀងផ្ទាត់)។

បើ $m=1$ នោះតាម (1) ទាញបាន $x=1$ ។ ពេលនោះយើងបាន $2^y=4$ នាំឲ្យ $y=2$

បើ $m=0$ នោះតាម (1) ទាញបាន $x=0$, ទាញបាន $y=0$ ។

ដូចនេះ ឬស $(x;y)$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិរបស់សមីការដែលឲ្យគឺ $(1;2), (0;0)$ ។

៦. (លំហាត់ត្រូវបានជ្រើសជាវិញ្ញាសាប្រឡង សូមមើលចំលើយនៅវិញ្ញាសាប្រឡង)។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

វិញ្ញាសាស្នើទី៩

១. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ: $\begin{cases} 5^{\ln x}=7^{\ln y} \\ (7x)^{\ln 7}=(5y)^{\ln 5} \end{cases}$

២. គេឲ្យស្វ៊ីតពីរ $(u_n),(v_n)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់: $\begin{cases} u_1=2011; v_1=2012 \\ u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u_nv_n}{v_n^2+1}+v_n\sin u_n\right) \\ v_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u_nv_n}{u_n^2+1}+u_n\cos v_n\right) \end{cases}$

ស្រាយបញ្ជាក់ថាស្វ៊ីត $(u_n),(v_n)$ មានលីមីតកំណត់។

៣. គេឲ្យពហុកោណពីរមាន n ជ្រុងចារឹកក្នុង និងចារឹកក្រៅរង្វង់មួយ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា ផលបូកបរិមាត្ររបស់ពហុកោណទាំងពីរធំជាងពីរដងបរិមាត្ររង្វង់នោះជានិច្ច។

៤. រកគ្រប់អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់:

$$f(x+y)+f(y+z)+f(z+x)+x+4y+7z\ge 3f(x+2y+3z);\quad \forall x,y,z\in\mathbb{R}\text{ ។}$$

៥. រកគ្រប់បណ្ដាចំនួនគត់វិជ្ជមាន a,b,c និងចំនួនបឋម p ផ្ទៀងផ្ទាត់: $(2a+3b)(3a+2b)=p^c$ ។

៦. តើមានអនុវត្តន៍មួយទល់មួយចំនួនប៉ុន្មាន $f:\{1;2;3;...;10\}\to\{1;2;3;...;10\}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់:

$|f(x)-x|\le 1;\ \forall x\in\{1;2;3;...;10\}$ ។

ចំលើយ

១. លក្ខខណ្ឌ $x>0; y>0$

$$\begin{cases} 5^{\ln x}=7^{\ln y} \\ (7x)^{\ln 7}=(5y)^{\ln 5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln\left(5^{\ln x}\right)=\ln\left(7^{\ln y}\right) \\ \ln(7x)^{\ln 7}=\ln(5y)^{\ln 5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln 5.\ln x=\ln 7.\ln y \\ (\ln 7+\ln x).\ln 7=(\ln 5+\ln y).\ln 5 \end{cases}$$

តាង $u=\ln x; v=\ln y$, យើងបាន: $\begin{cases} \ln 5.u-\ln 7.v=0 \\ \ln 7.u-\ln 5.v=\ln^2 5-\ln^2 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=-\ln 7 \\ v=-\ln 5 \end{cases}$

ជំនួសចូល, យើងបាន: $\begin{cases}\ln x=-\ln 7\\ \ln y=-\ln 5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{7}\\ y=\dfrac{1}{5}\end{cases}$

២. យើងមាន: $u_{n+1}^2=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{u_nv_n}{v_n^2+1}+v_n\sin u_n\right)^2\le\dfrac{1}{4}\left(u_n^2+v_n^2\right)\left(\dfrac{v_n^2}{\left(v_n^2+1\right)^2}+\sin^2 u_n\right)\le\dfrac{5}{16}\left(u_n^2+v_n^2\right)$

$$v_{n+1}^2=\frac{1}{4}\left(\frac{u_nv_n}{u_n^2+1}+u_n\cos v_n\right)^2\le\frac{1}{4}\left(v_n^2+u_n^2\right)\left(\frac{u_n^2}{\left(u_n^2+1\right)^2}+\cos^2 v_n\right)\le\frac{5}{16}\left(u_n^2+v_n^2\right)$$

$$\Rightarrow u_{n+1}^2+v_{n+1}^2\le\frac{10}{16}\left(u_n^2+v_n^2\right)$$

ដូចនោះស្វ៊ីត $\left(u_n^2+v_n^2\right)$ មានលីមីតស្មើ 0 ។

ដូចនោះ បណ្ដាស្វ៊ីត $(u_n),(v_n)$ មានលីមីតស្មើ 0 ។

៣. តាងកាំរង្វង់នោះដោយ R ។ a_n,b_n ជាជ្រុងរបស់ពហុកោណនិយ័តទាំងពីរនោះ។ P_1,P_2,P_3 ជាបរិមាត្ររបស់ពហុកោណនិយ័តទាំងពីរ និងរង្វង់។

យើងបាន: $a_n=2R\sin\dfrac{\pi}{n};\ b_n=2R\tan\dfrac{\pi}{n}$

$$P_1+P_2=2.n.R.\left(\sin\frac{\pi}{n}+\tan\frac{\pi}{n}\right);\ P_3=2\pi R$$

ដោយ $n>2\Rightarrow 0<\dfrac{\pi}{2n}<\dfrac{\pi}{4}$ នោះ:

$$\sin\frac{\pi}{n}+\tan\frac{\pi}{n}=\frac{4\tan\dfrac{\pi}{2n}}{1-\tan^4\dfrac{\pi}{2n}}>4\tan\frac{\pi}{2n}>4.\frac{\pi}{2n}=\frac{2\pi}{n}\Rightarrow P_1+P_2>2P_3\text{ ។}$$

៤. តាង $g(x)=f(x)-x$ ។ យើងបាន:

$$g(x+y)+g(y+z)+g(z+x)\ge 3g(x+2y+3z);\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}$$

យក $x=y=\dfrac{a}{2};\ z=-\dfrac{a}{2}$ យើងបាន: $g(a)\ge g(0);\ \forall a\in\mathbb{R}$

ដូចនោះ: $g(0)=\min g(x)$ (1)

យក $x=-y;\ z=0$ យើងបាន: $g(x)+g(-x)+g(0)\ge 3g(-x);\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow g(x)+g(0)\ge 2g(-x);\ \forall x\in\mathbb{R}$ (2)

តាម $(1),(2)\Rightarrow g(x)\ge g(-x);\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow g(x)=g(-x);\ \forall x\in\mathbb{R}$

តាម $(2)\Rightarrow g(0)\ge g(-x);\ \forall x\in\mathbb{R}$

តាម $(1)\Rightarrow g(0)=g(-x);\ \forall x\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ $g(x)=g(0)=C;\ \forall x\in\mathbb{R}$

ដូចនោះ: $f(x)=x+C;\ \forall x\in\mathbb{R}$ ។

៥. ឧបមាថាមានប្រព័ន្ធបួនចំនួន (a,b,c,p) ផ្ទៀងផ្ទាត់ប្រធាន, យើងបាន:

$$(2a+3b)(3a+2b)=p^c \Rightarrow \begin{cases} 2a+3b=p^m \\ 3a+2b=p^n \end{cases} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{3p^n-2p^m}{5} \\ b=\dfrac{3p^m-2p^n}{5} \end{cases} \quad (2)$$

បើ $p\neq 5$ នោះតាម $(1)\Rightarrow m,n\geq 1$ ហើយ $m\neq n$ (ព្រោះ p ចែកមិនដាច់នឹង 5) $\Rightarrow c>2$ ហើយតាម $(2)\Rightarrow a,b$ ចែកដាច់នឹង p ។

ដូចនោះ ប្រព័ន្ធបួនចំនួន $\left(\dfrac{a}{p},\dfrac{b}{p},c-2,p\right)$ ក៏ផ្ទៀងផ្ទាត់ប្រធានដែរ។ ដូចនេះ មានប្រព័ន្ធចំនួន (a,b,c,p) ច្រើនរាប់មិនអស់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ប្រធាន ចំពោះតំលៃ a,b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានថយចុះជាលំដាប់(មិនសមហេតុផល)។ ដូចនេះ $p=5$ ។

$$(2)\Rightarrow \begin{cases} a=3.5^{n-1}-2.5^{m-1} \\ b=3.5^{m-1}-2.5^{n-1} \end{cases}$$

បើ $m>n$ នោះ $a<0$ មិនសមហេតុផល, បើ $m<n$ នោះ $b<0$ មិនសមហេតុផល។ នាំឲ្យ $m=n=k+1$ ។ ដូចនោះ គ្រប់បណ្តាប្រព័ន្ធ 4 ចំនួន (a,b,c,p) រកបានគឺ $(5^k,5^k,2k+2,5)$ ចំពោះ k ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិណាក៏ដោយ។

៦. តាង S_n ជាចំនួនអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ $f:\{1;2;3;...;n\}\to\{1;2;3;...;n\}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់:

$$|f(x)-x|\leq 1;\ \forall x\in\{1;2;3;...;n\}$$

យើងមាន: $S_1=1; S_2=2$ ។

ចំពោះ $n>2$ យើងបាន: បើ $f(n)=n$ នោះចំនួនអនុវត្តន៍មួយទល់មួយដូចនេះគឺមាន S_{n-1} ។

បើ $f(n)=n-1$ នោះ $f(n-1)=n$ ដូចនោះ ចំនួនអនុវត្តន៍មួយទល់មួយដូចនេះ មាន S_{n-2} ។

ដូចនោះ $S_n=S_{n-1}+S_{n-2}$ ចំពោះ $n>2$ ។

ពីនោះ គណនាបានចំលើយរបស់លំហាត់គឺ $S_{10}=89$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

វិញ្ញាសាស្នើទី៦

១. ដោះស្រាយសមីការ: $729x^4+8\sqrt{1-x^2}=36$

២. គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិតពីរ $(x_n),(y_n)$ ត្រូវបានកំណត់ដោយ: $\begin{cases} x_1=y_1=\sqrt{3} \\ x_{n+1}=x_n+\sqrt{1+x_n^2},\ \forall n\geq 1 \\ y_{n+1}=\dfrac{y_n}{1+\sqrt{1+y_n^2}},\ \forall n\geq 1 \end{cases}$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $2<x_n.y_n<3,\ \forall n>1$ ។

៣. គេឲ្យចតុកោណប៉ោង $ABCD$ ចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត O, AD ប្រសព្វ BC ត្រង់ M, AB ប្រសព្វ CD ត្រង់ N, AC ប្រសព្វ BD ត្រង់ I ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា O ជាអរតូសង់របស់ត្រីកោណ MIN ។

៤. រកគ្រប់អនុគមន៍ $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ ដើម្បីឲ្យ:

$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y)$, ចំពោះគ្រប់ $x,y\in\mathbb{Q}$ ។

៥. គេឲ្យ m,n ជាបណ្តាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ បង្ហាញថា: $S(m,n)=\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+...+\frac{1}{m+n}$ មិនមែនជាចំនួនគត់

៦. នៅលើរង្វង់ដែលមាន 4×4 ប្រឡោះការេ, គេបំពេញចំនួន 1រឺ -1ចូលក្នុងគ្រប់ប្រឡោះ, ប្រឡោះនីមួយៗបំពេញតែមួយលេខទេ។ តើមានប៉ុន្មានវិធីបំពេញដូចខាងលើ ដើម្បីឲ្យផលបូកគ្រប់ចំនួននៅលើជួរដេកនីមួយៗស្មើ 0 ហើយផលបូកគ្រប់ចំនួននៅលើជួរឈរនីមួយៗស្មើ 0?

ចំលើយ

១. លក្ខខណ្ឌ: $-1\le x\le 1$, តាង $y=\sqrt{1-x^2}$ $(0\le y\le 1)$

សមីការក្លាយទៅជា: $729\left(1-y^2\right)^2+8y=36$

$$\Leftrightarrow\left[27^2\left(1-y^2\right)^2-36\left(1-y^2\right)+\frac{4}{9}\right]-\left(36y^2-8y+\frac{4}{9}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[27\left(1-y^2\right)-\frac{2}{3}\right]^2-\left(6y-\frac{2}{3}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\left[27\left(1-y^2\right)-6y\right]\left[27\left(1-y^2\right)+6y-\frac{4}{3}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=\frac{-1\pm\sqrt{82}}{9}\\ y=\frac{1\pm\sqrt{78}}{9}\end{array}\right.$$

ធៀបនឹងលក្ខខណ្ឌយើងបាន: $y=\frac{-1+\sqrt{82}}{9}\Rightarrow x=\pm\frac{1}{9}\sqrt{2\sqrt{82}-2}$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $x=\pm\frac{1}{9}\sqrt{2\sqrt{82}-2}$ ។

២. តាង $z_n=\frac{1}{y_n}\Rightarrow z_{n+1}=z_n+\sqrt{1+z_n^2}$ ដោយ $z_2=\sqrt{3}=x_1$ នោះ $z_n=x_{n-1},\ \forall n>1$ ។

ដូចនោះ $x_n.y_n=\frac{x_n}{z_n}=\frac{x_n}{x_{n-1}}$

ពី $\sqrt{1+x_{n-1}^2}>x_{n-1}\Rightarrow x_n>2x_{n-1}\Rightarrow x_n.y_n>2$

ដោយ (x_n) កើននោះ $x_{n-1}^2\ge x_1^2=3>\frac{1}{3},\ \forall n>1$

$\Rightarrow 2x_{n-1}>\sqrt{1+x_{n-1}^2}\Rightarrow 3x_{n-1}>x_n\Rightarrow 3>x_n.y_n$

ដូចនេះ $2<x_n.y_n<3,\ \forall n>1$ ។

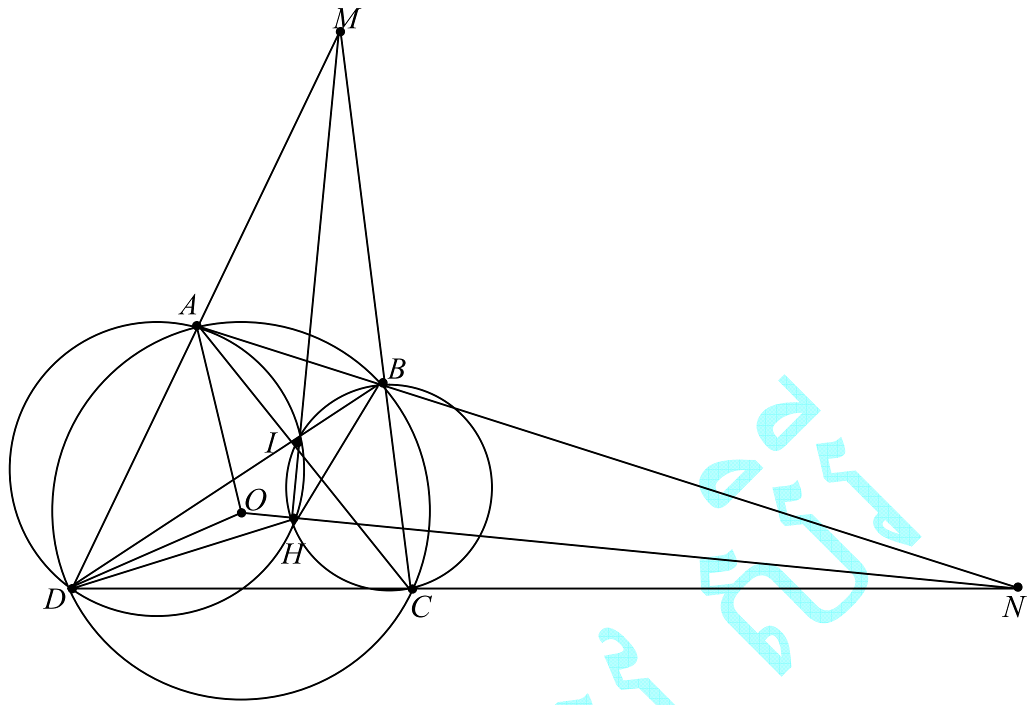
៣. ស្រាយថា $IM\perp ON$:

តាង H ជាចំនុចប្រសព្វទីពីររបស់រង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ AID និងរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ BIC ។

$\overline{MA}.\overline{MD}=\overline{MB}.\overline{MC}$

$\Rightarrow M$ ស្ថិតនៅលើអ័ក្ស ....របស់រង្វង់ទាំងពីរដែលចារឹកក្រៅចតុកោណ $AIHD$ និង $BIHC$ ។

$\Rightarrow M,I,H$ រត់ត្រង់ជួរ។



ពិនិត្យចតុកោណ $DOHC$, យើងបាន: $\widehat{DHC}=360^0-\widehat{DHI}-\widehat{IHC}=\widehat{DAC}+\widehat{DBC}=\widehat{DOC}$

ទាញបាន ចតុកោណ $DOHC$ ចារឹកក្នុង។ ដូចគ្នាដែរ, ចតុកោណ $AOHB$ ចារឹកក្នុង។

ជាងនេះទៅទៀត: $\overline{NA}.\overline{NB}=\overline{NC}.\overline{ND}$

$\Rightarrow M$ ស្ថិតនៅលើអ័ក្ស.....របស់រង្វង់ទាំងពីរដែលចារឹកក្រៅចតុកោណ $AOHB$ និង $DOHC$ ។

$\Rightarrow O, H, N$ រត់ត្រង់ជួរ។

យើងបាន: $\widehat{IHO}=\widehat{IHD}-\widehat{OHD}=\left(180^0-\widehat{DAC}\right)-\widehat{OCD}$

$$=\widehat{ADC}+\widehat{ACD}-\widehat{OCD}=\widehat{ADC}+\widehat{OCA}=90^0$$

$\Rightarrow IM \perp ON$ (ព្រោះ O, H, N រត់ត្រង់ជួរហើយ M, I, H រត់ត្រង់ជួរ)

ស្រាយបញ្ជាក់ដូចគ្នាដែរ $IN \perp OM$

ដូចនេះ O ជាអរតូសង់របស់ត្រីកោណ MIN ។

៤. ឧបមាថា f ផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y)$

ឲ្យ $x=y=0 \Rightarrow f(0)=0$

យើងស្រាយបញ្ជាក់ដោយវិចារអនុមានរួម $f(nz)=n^2 f(z),\ \forall z\in\mathbb{Q}$ តាម n ។

ច្បាស់ណាស់សំណើរពិតចំពោះ $n=0, n=1$ ។

ឧបមាថាសំណើរពិតចំពោះ $n-1, n-2$ ។ យើងស្រាយបញ្ជាក់ថាវាពិតចំពោះ n ។

ឲ្យ $x=(n-1)z,\ y=z$, យើងបាន:

$$f(nz)+f((n-2)z)=f((n-1)z+z)+f((n-1)z-z)=2f((n-1)z)+2f(z)$$

$$\Rightarrow f(nz)=2f((n-1z)+2f(z)-f((n-2)z)=2(n-1)^2z+2z-(n-2)^2z=n^2f(z)$$

ឲ្យ $x=0$ ទាញបាន: $f(y)+f(-y)=2f(0)+2f(y)=2f(y)$

$\Rightarrow f(-y)=f(y),\ \forall y\in\mathbb{Q}$

ដូចនេះ: $f(nz)=n^2f(z), \forall z\in\mathbb{Q}, \forall n\in\mathbb{Z}$ ។

តាង $k=f(1), x=\frac{p}{q}$ ចំពោះ $p,q\in\mathbb{Z}$ ។

យើងបាន $q^2f(x)=f(qx)=f(p)=p^2f(1)=kp^2 \Rightarrow f(x)=\frac{kp^2}{q^2}=kx^2$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ឡើងវិញ យើងបាន $f(x)=kx^2, k\in\mathbb{Q}$ បំពេញលក្ខខណ្ឌប្រធាន។

ដូចនេះ $f(x)=kx^2,\ k\in\mathbb{Q}$ ។

៥. ឧបមាថា $S(m,n)$ ជាចំនួនគត់ ចំពោះ m,n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានណាក៏ដោយ។

តាង $B=LCM(m,m+1,...,m+n)$ (LCM: Least Common Multiples: ពហុគុណរួមតូចបំផុត)

ពេលនោះ B ជាចំនួនគូ នាំឲ្យ $B.S(m,n)$ ជាចំនួនគូ។

យើងបាន: $B.S(m,n)=\frac{B}{m}+\frac{B}{m+1}+...+\frac{B}{m+n}$

ទាញបាន ភាពផ្ទុយគ្នាដោយវិធីស្រាយបញ្ជាក់ថាអង្គខាងស្តាំជាចំនួនសេស។

ពិតជាដូចនេះ, ចំពោះ $i=0,1,...,n$ យើងតាង $m+i=2^{\alpha_i}.k_i$, ចំពោះ $\alpha_i\in\mathbb{N}, k_i$ ជាចំនួនសេស។

តាង $A=\max\{\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_n\}$ ។

ច្បាស់ណាស់ថា $2^A|B$ និង $2^{A+1}\nmid B$ ។

ឧបមាថា $\alpha_j=A$ (ចំពោះ $0\le j\le n$)។ យើងសន្មតថា j មានតែមួយគត់។

ឧបមាថា $\alpha_j=\alpha_{j_1}=A$ ចំពោះ $0\le j\le j_1\le n$ ។

$$m+j=2^{\alpha_j}.k_j$$

$$m+j_1=2^{\alpha_{j_1}}.k_{j_1}$$

k_j,k_{j_1} ជាពីរចំនួនសេសនោះ k_j+1 ជាចំនួនគូផ្ទៀងផ្ទាត់ $k_j<k_j+1<k_{j_1}$

$\Rightarrow m+j<2^{\alpha_j}.(k_j+1)<m+j_1$

$\Rightarrow$ មាន $j_0\in\{0,1,...,n\}$ យ៉ាងណាឲ្យ $m+j_0=2^{\alpha_j}(k+1)\vdots 2^{\alpha_j+1}=2^{A+1}$

ករណីនេះផ្ទុយនឹងការរើសយក A ។

ដូចនេះ $S(m,n)$ មិនមែនជាចំនួនគត់ចំពោះ $\forall m,n\in\mathbb{Z}^+$ ។

៦. (លំហាត់នេះត្រូវបានជ្រើសជាលំហាត់ប្រឡង សូមមើលចំលើយនៅវិញ្ញាសាប្រឡង)

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

វិញ្ញាសាស្នើទី៧

១. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ: $\begin{cases}2x^2+xy-1=0 & (1)\\ \frac{x^2}{2(1-x)^4}-\frac{xy}{6(1-x)^2}=\frac{1}{9} & (2)\end{cases}$

២. គេឲ្យ a ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិមិនតូចជាង 3 ។ ពិនិត្យស្វ៊ីត: $\begin{cases}u_1=a\\ u_{n+1}=u_n-\left[\frac{u_n}{2}\right]+1 & \forall n\ge 1\end{cases}$,

(ចំពោះ $\left[\frac{u_n}{2}\right]$ ជាផ្នែកគត់របស់ $\frac{u_n}{2}$)។ រក $\lim u_n$ ។

៣. ក្នុងគ្រប់បណ្តាត្រីកោណបាតរួមគ្នា និងមានមុំនៅកំពូលដូចគ្នា។ រកត្រីកោណដែលមានក្រឡាផ្ទៃធំបំផុត។

៤. គេឲ្យ $k>1$ ។ ចូររកគ្រប់អនុគមន៍កើនដាច់ខាត $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់:

$$f(xf(y))=yf(kx)\ \forall x,y\in\mathbb{R}\quad(*)$$ ។

៥. រកចំនួនគត់វិជ្ជមាន b ផ្ទៀងផ្ទាត់:

$i)\ b\in\left[4^{2012};30^{2012}\right]$

$ii)\ b\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 31)$

$iii)$ ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន k នីមួយៗ, មាន a_k ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_k^{2012}-b$ ចែកដាច់នឹង k ។

៦. កំណត់ចំនួនចំលាស់ $(a_1,a_2,...,a_{2012})$ របស់សំនុំ $\{1;2;3;...;2012\}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណៈខាងក្រោម: $2(a_1+a_2+...+a_k)$ ចែកដាច់នឹង k ,ចំពោះគ្រប់ $k=1,2,...,2012$ ។

ចំណើយ

១. ពិនិត្យសមីការ: $2t^2+y.t-1=0\Rightarrow t_1=x$ ជាឫសមួយ

សមីការទី $(2)\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{-3x}{2(1-x)^2}\right)^2+y\left(\dfrac{-3x}{2(1-x)^2}\right)-1=0$

$$\Rightarrow t=-\frac{3x}{2(1-x)^2}$$ ជាឫសទីពីរ

អនុវត្តន៍ទ្រឹស្តីបទវ្យែត: $t_1.t_2=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x.\left(-\dfrac{3x}{2(1-x)^2}\right)=-\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2x-1=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\\ x_2=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$$

តាម (1) យើងឃើញថា $x\neq 0\Rightarrow y=\dfrac{1-2x^2}{x}$

ចំពោះ: $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\Rightarrow y_1=\left[1-2\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]^2\left(-\dfrac{2}{1+\sqrt{3}}\right)=2$

ចំពោះ: $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\Rightarrow y_2=\left[1-2\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]^2\left(\dfrac{2}{-1+\sqrt{3}}\right)=2$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធមានចំលើយពីរ: $\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2};2\right)$ និង $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2};2\right)$ ។

២. • ករណីទី១៖ $a=3$, យើងបាន $u_n=3\ \forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\lim u_n=3$

• ករណីទី២៖ $a\geq 4$ ។

បើ $u_n\geq 4$

យើងបាន: $u_n=\dfrac{u_n}{2}+\dfrac{u_n}{2}\geq\dfrac{u_n}{2}+2\geq\left[\dfrac{u_n}{2}\right]+2\Rightarrow u_{n+1}=u_n-\left[\dfrac{u_n}{2}\right]+1\geq 3$

ហើយ $\dfrac{u_n}{2}\geq 2\Rightarrow\left[\dfrac{u_n}{2}\right]\geq 2>1\Rightarrow u_{n+1}=u_n-\left[\dfrac{u_n}{2}\right]+1<u_n$

ដូចនេះ បើ $u_n\leq 4$ នោះ $u_n>u_{n+1}\geq 3$ ។ ម្យ៉ាងទៀត $u_n\in\mathbb{Z},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$

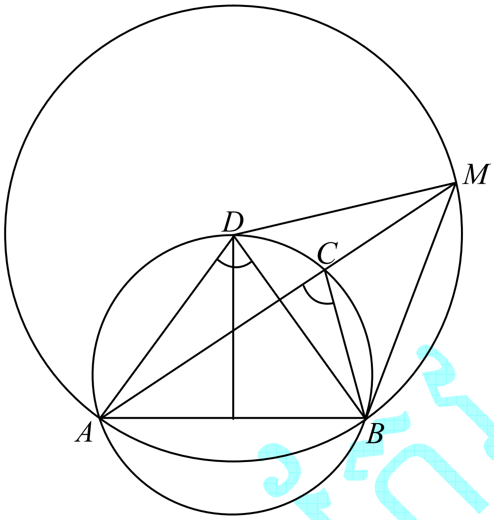
ឧបមាថា $u_n \ge 4 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$ យើងបាន $u_1>u_2>u_3>...>u_n>...\ge 3$

និង $u_n\in\mathbb{Z}, \forall n\in\mathbb{N}^*$ ករណីនេះមិនសមហេតុផល ព្រោះគ្រប់តំលៃរបស់ u_n គឺកំណត់បាន។

ដូចនេះ មាន $u_k=3$ ចំពោះ $k\in\mathbb{N}^*$ ។

ពេលនោះ $u_n=3, \ \forall n\ge k$ ។ ទាញបាន $\lim u_n=3$ ។

៣.



សង់ធ្នូមានផ្ចុកមុំ φ សន្ទឹងខ្សែ AB ។ ពិនិត្យត្រីកោណពីរ ចារឹកក្នុងធ្នូមានផ្ចុកមុំនោះ គឺត្រីកោណ ADB និងត្រីកោណសាមញ្ញ ACB យើងបាន $\widehat{ADB}=\widehat{ACB}=\varphi$

សង់រង្វង់ផ្ចិត D កាំ DA ។ តាង M ជាប្រសព្វរបស់ AC និង (D) ។

យើងបាន: $AD+DB=AD+DM>AM=AC+CM$ (1)

យើងបាន: $\widehat{AMB}+\widehat{MBC}=\widehat{ACB}$ (2)

ដោយ $\widehat{AMB}=\frac{1}{2}\widehat{ADB}=\frac{1}{2}\widehat{ACB}$ (3)

តាម $(2)\,\&\,(3)$ ទាញបាន $\widehat{AMB}=\widehat{MBC}=\frac{1}{2}\widehat{ACB}$

$\Rightarrow$ ត្រីកោណ MBC ជាត្រីកោណសមបាតត្រង់ $C\Rightarrow CM=CB$

ជំនួសចូល (1) យើងបាន: $AD+DB>AC+CB\Rightarrow$ បរិមាត្រ ΔABD ធំជាងបរិមាត្រ ΔABC ។

ដូចនេះ ក្នុងគ្រប់បណ្តាត្រីកោណ មានបាតរួមគ្នា និងមុំនៅកំពូលដូចគ្នាស្មើនឹង φ គឺត្រីកោណសមបាត មានបរិមាត្រធំបំផុត។

៤. ឧបមាថា f ជាអនុគមន៍ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌប្រធាន

ជំនួស $x=y=1$ ចូល $(*)$ នាំឲ្យ $f(f(1))=f(k)$ ។

ដោយ f កើនដាច់ខាតនោះ: $f(1)=k$ ហើយ $f(k)>f(1)=k>0$

ជំនួស $x=1$ ចូល $(*)$ យើងបាន: $f(f(y))=yf(k)\ \ \forall y\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow\ f(f(f(y)))=f(yf(k))\ \ \forall y$

$\Rightarrow\ f(y).f(k)=kf(ky)\ \ \forall y\Rightarrow f(x).f(k)=kf(kx)\ \forall x$

យើងស្រាយបញ្ជាក់ថា មានអនុគមន៍ $f(x)=kx\ \ \forall x$ តែមួយគត់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌប្រធាន

ពិតជាដូចនេះ: $f(x)=kx$ ជាអនុគមន៍ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌប្រធាន

ឧបមាថា មាន $f(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌប្រធានដែល $f(x)\neq kx$,

ទាញបាន $\exists x_0\in\mathbb{R}: f(x_0)\neq kx_0$ រឺ $\exists x_0\in\mathbb{R}:\left[\begin{array}{l} f(x_0)>kx_0 \\ f(x_0)<kx_0\end{array}\right.$

បើ $f(x_0)>kx_0$, ដោយ f កើតដាច់ខាតនាំឲ្យ $f(f(x_0))>f(kx_0)$ ។

ពេលនោះទាញបាន $x_0 f(k)>f(kx_0)$

$\Rightarrow kx_0 f(k)>kf(kx_0)=f(x_0).f(k)\Rightarrow kx_0>f(x_0)$, ផ្ទុយពីការពិត

បើ $f(x_0)<kx_0$, ដោយ f កើនដាច់ខាតនាំឲ្យ $f(f(x_0))<f(kx_0)$ ។

ពេលនោះ ទាញបាន $x_0 f(k)<f(kx_0)$

$\Rightarrow kx_0 f(k)<kf(kx_0)=f(x_0).f(k)\Rightarrow kx_0<f(x_0)$, ផ្ទុយពីការពិត។

ដូចនេះ មានតែអនុគមន៍មួយគត់គឺ $f(x)=kx$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌប្រធាន។

៥. ដំបូងយើងស្រាយបញ្ជាក់លក្ខខណ្ឌ $iii)$ សមមូលនឹង $b=A^n$ (A ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន)

ឧបមាថា $b=p_1^{\alpha_1}.....p_m^{\alpha_m}$ (p_i ជាបណ្ដាចំនួនបឋមផ្សេងគ្នា, $\alpha_i>0$)

អនុវត្តន៍លក្ខខណ្ឌ $ii)$ ឲ្យ $k=b^2$ យើងបាន: $a_k^{2012}\equiv b\ (\mathrm{mod}\ b^2)$

ទាញបាន $a_k^{2012}\equiv b\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p_i^{\alpha_i})$

ហើយ $a_k^{2012}\equiv b\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p_i^{\alpha_i+1})$ (ព្រោះ $2\alpha_i\geq\alpha_i+1$) (ចំពោះគ្រប់ i)

ពីករណីនេះ នាំឲ្យស្វ័យគុណធំបំផុតរបស់ p_i ជាតួចែកនៃ a_k^{2012} គឺ $p_i^{\alpha_i}$ ។

ទាញបាន $2012\,|\,\alpha_i$ ចំពោះគ្រប់ i ។

ដូចនេះ $b=A^{2012}$ ចំពោះ $A=p_1^{\frac{\alpha_1}{2012}}.....p_m^{\frac{\alpha_m}{2012}}$

ផ្ទុយមកវិញ ចំពោះ $b=A^{2012}$ ។

ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន k នីមួយៗ, ពិនិត្យ $a_k=A+k$, ពេលនោះ

$$a_k^{2012}-b\equiv a_k^{2012}-A^{2012}\equiv(a_k-A)M\equiv kM\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ k)$$

ពីលក្ខខណ្ឌ $i)$ ទាញបាន $A\in\{4;5;...;30\}$

យើងបាន $A^{2012}\equiv\left(A^{30}\right)^{67}.A^2\equiv A^2\ (\mathrm{mod}\ 31)$

ដូចនេះ: $b\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 31)\Leftrightarrow A^2\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 31)\Leftrightarrow 31\,|\,(A-1)(A+1)\Leftrightarrow A=30$

ដូចនេះ: $b=30^{2012}$ ។

៦. តាង S_n ជាសំនុំបណ្ដាចំលាស់ $(a_1,a_2,...,a_n)$ របស់សំនុំ $\{1;2;3;...;n\}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណៈ៖

$2(a_1+a_2+...+a_k)$ ចែកដាច់នឹង k, ចំពោះគ្រប់ $k=1,2,...,n$ (*)

យើងបាន $|S_1|=1, |S_2|=2, |S_3|=6$ ។ យើងស្រាយបញ្ជាក់ $|S_n|=2|S_{n-1}|$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 4$

ដំបូង យើងស្រាយបញ្ជាក់ថា, ចំពោះចំលាស់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ (*) នីមួយៗ, ត្រូវមាន $a_n=1$ រឺ $a_n=n$ ។

ពិតជាដូចនេះ

ចំពោះចំលាស់ $(a_1,a_2,...,a_n)$ នីមួយៗដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ (*), យើងបាន:

$$2(a_1+a_2+...+a_{n-1})=2(a_1+a_2+...+a_n)-2a_n=2(1+2+...+n)-2a_n$$
$$=n(n+1)-2a_n=(n+2)(n-1)+(2-2a_n)$$

ដោយ $2(a_1+a_2+...+a_{n-1})$ ចែកដាច់នឹង $(n-1)$ នោះ $(2a_n-2)$ ចែកដាច់នឹង $n-1$ ។

ទាញបាន $a_n = 1$ រឺ $a_n = n$ រឺ $a_n = \frac{n+1}{2}$ (បើ n ជាចំនួនសេស)។

បើ $a_n = \frac{n+1}{2}$ (n ជាចំនួនសេស), យើងបាន:

$2(a_1 + a_2 + ... + a_{n-2}) = 2(a_1 + a_2 + ... + a_n) - 2a_{n-1} - 2a_n$

$= 2(1 + 2 + ... + n) - 2a_{n-1} - (n+1) = (n-2)(n+2) + (3 - 2a_{n-1})$

ដោយ $2(a_1 + a_2 + ... + a_{n-2})$ ចែកដាច់នឹង $(n-2)$ នោះ $2a_{n-1} - 3$ ចែកដាច់នឹង $n-2$

ដោយ $2a_{n-1} - 3 \le 2n - 3 < 3n - 6$ ពេល $n > 3$ នាំឲ្យ $2a_{n-1} - 3 = n - 2$ រឺ $2a_{n-1} - 3 = 2n - 4$

(មិនសមហេតុផលព្រោះ $2a_{n-1} - 3$ ជាចំនួនសេស)

ទាញបាន $a_{n-1} = \frac{n+1}{2} = a_n$ (ផ្ទុយពីការពិត)

តាង $S_{n1} = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid (a_1, a_2, ..., a_n) \in S_n, a_n = n\}$;

$S_{n2} = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid (a_1, a_2, ..., a_n) \in S_n, a_n = 1\}$

បើ $a_n = n$ នោះ $(a_1, a_2, ..., a_{n-1})$ ក៏ជាចំលាស់មួយរបស់ $\{1; 2; ...; n-1\}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ (*) ដែរ។

ទាញបាន អនុវត្តន៍ f ខាងក្រោមនេះជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ:

$f: \quad S_{n1} \to S_{n-1}$

$(a_1, a_2, ..., a_{n-1}, n) \mapsto (a_1, a_2, ..., a_{n-1})$

បើ $a_n = 1$, ពិនិត្យ $(a_1 - 1), a_2 - 1), ..., a_{n-1} - 1)$ ជាចំលាស់មួយរបស់ $\{1; 2; ...; n-1\}$ ។

យើងបាន $2((a_1 - 1) + (a_2 - 1) + ... + (a_k - 1)) = 2(a_1 + a_2 + ... + a_k) = 2k$ ចែកដាច់នឹង k លុះត្រាតែ $2(a_1 + a_2 + ... + a_k)$ ចែកដាច់នឹង k ។

ទាញបាន អនុវត្តន៍ខាងក្រោមនេះ ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ:

$g: \quad S_{n2} \to S_{n-1}$

$(a_1, a_2, ..., a_{n-1}, 1) \mapsto (b_1, b_2, ..., b_{n-1}) = (a_1 - 1, a_2 - 1, ..., a_{n-1} - 1)$

ដូចនេះ $|S_n| = |S_{n1}| + |S_{n2}| = 2|S_{n-1}|$ ។ ទាញបាន: $S_{2012} = 3.2^{2010}$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

វិញ្ញាសាស្នើទី៨

១. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ: $\begin{cases} 2x = \sqrt{3z-2} + z^3 - 2z^2 + 2 \\ 2y = \sqrt{3x-2} + x^3 - 2x^2 + 2 \\ 2z = \sqrt{3y-2} + y^3 - 2y^2 + 2 \end{cases}$

២. គេឲ្យស្វ៊ីត (x_n) កំណត់ដូចខាងក្រោម: $x_1 = 3$ និង $x_{n+1} = \frac{x_n^{2012} + 2x_n + 4}{x_n^{2011} - x_n + 6}$ ចំពោះ $n = 1, 2, 3, ...$ ។

ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន n នីមួយៗ, តាង $y_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^{2011} + 4}$ ។ រក $\lim_{n\to+\infty} y_n$ ។

៣. គេឲ្យត្រីកោណ ABC ចារឹកក្នុងរង្វង់មួយ ហើយ M ជាចំនុចនៅចំកណ្តាលរបស់ធ្នូ BC ។ តាង I, J, K តាមលំដាប់ ជាជើងកំពស់ដែលគូសពី M ទៅលើបន្ទាត់ AB, BC, CA; X ជាប្រសព្វរបស់ BK និង AJ, L ជាប្រសព្វរបស់ CX និង IJ ។ សង់កន្លះបន្ទាត់ Jy កែងនឹង MK កាត់ AL ត្រង់ T ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា CT កែងនឹង IM ។

៤. គេឲ្យស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដូចខាងក្រោម: $u_1 = u_2 = 1$ និង $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, ចំពោះ $n = 1, 2, 3, \ldots$ ។ រកគ្រប់បណ្ដាចំនួនគត់វិជ្ជមាន a និង b ចំពោះ $a < b$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $u_n - 2na^n$ ចែកដាច់នឹង b ចំពោះគ្រប់ $n = 1, 2, 3, \ldots$ ។

៥. គេឲ្យមនុស្ស 97 នាក់មកពីទីក្រុងបី, មនុស្សម្នាក់ៗធ្វើការងារមួយក្នុងចំនោមការងារបួនផ្សេងគ្នា។ ដោយដឹងថា ឲ្យតែមនុស្ស 5 នាក់ណាក៏ដោយ ដែលមានការងារដូចគ្នា នោះមានមនុស្សពីរនាក់ដែលមានអាយុស្មើគ្នា។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា មានយ៉ាងតិចមនុស្សបីនាក់ដែលមានអាយុស្មើគ្នា, ធ្វើការងារដូចគ្នា និងមកពីទីក្រុងតែមួយ។

ចំលើយ

១. ប្រព័ន្ធសមីការ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2z = \sqrt{3z-2} + z^3 - 2z^2 + 2z + 2 \\ 2y+2x = \sqrt{3x-2} + x^3 - 2x^2 + 2x + 2 \\ 2z+2y = \sqrt{3y-2} + y^3 - 2y^2 + 2y + 2 \end{cases}$

ពិនិត្យអនុគមន៍ $f(t) = \sqrt{3t-2} + t^3 - 2t^2 + 2t + 2$ នៅលើ $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$

យើងបាន $f'(t) = \dfrac{3}{2\sqrt{3t-2}} + 3t^2 - 4t + 2 > 0 \ \forall t \in \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$

ទាញបាន $f(t)$ ជាអនុគមន៍កើននៅលើ $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$

ដោយ x, y, z មានតួនាទីដូចគ្នា, នោះយើងឧបមាថា $x \ge y \ge z \quad (1)$

$\Rightarrow f(x) \ge f(y) \ge f(z)$

$$\Rightarrow (2y+2x) \ge (2z+2y) \ge (2x+2z) \Rightarrow \begin{cases} x \ge z \\ y \ge z \\ y \ge x \end{cases} \Rightarrow y \ge x \ge z \qquad (2)$$

$$\Rightarrow (2z+2y) \ge (2y+2x) \ge (2x+2z) \Rightarrow \begin{cases} z \ge x \\ y \ge z \\ y \ge x \end{cases} \Rightarrow y \ge z \ge x \qquad (3)$$

តាម (1), (2), (3) ទាញបាន $x = y = z$

ចំពោះ $x = y = z$ ជំនួសចូលប្រព័ន្ធយើងបាន: $\sqrt{3x-2} + x^3 - 2x^2 - 2x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3x-2} - 2\right) + x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-2)}{\sqrt{3x-2}+2} + (x-2)(x^2-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ \dfrac{3}{\sqrt{3x-2}+2} + x^2 - 2 = 0 \quad (*) \end{array}\right.$$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{3x-2}+2} - 1 + x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{3x-2}+2} + x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-3x}{\left(\sqrt{3x-2}+2\right)\left(1+\sqrt{3x-2}\right)} + (x-1)(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x+1=\dfrac{3}{\left(\sqrt{3x-2}+2\right)\left(1+\sqrt{3x-2}\right)} \quad (**) \end{array}\right.$$

ពិនិត្យសមីការ (**), យើងមានអង្គខាងឆ្វេង $\geq 1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$, អង្គខាងស្តាំ $\leq \frac{3}{2}$, នោះ (**) គ្មានឫស។

ដូចនេះ $x=y=z=2 \vee x=y=z=1$ ។

២. តាង $\alpha=2011$

ពិនិត្យ $x_{n+1}-2=\dfrac{x_n^{\alpha+1}+2x_n+4}{x_n^{\alpha}-x_n+6}-2=\dfrac{x_n^{\alpha+1}-2x_n^{\alpha}+4x_n-8}{x_n^{\alpha}-x_n+6}=\dfrac{(x_n-2)(x_n^{\alpha}+4)}{(x_n^{\alpha}+4)-(x_n-2)}$ (*)

ដោយប្រើវិចារអនុមានរួម យើងស្រាយបញ្ជាក់បាន $x_n>2, \forall n\geq 1$ ។

ពិនិត្យ $x_{n+1}-x_n=\dfrac{x_n^{\alpha+1}+2x_n+4}{x_n^{\alpha}-x_n+6}-x_n=\dfrac{x_n^2-4x_n+4}{x_n^{\alpha}-x_n+6}$

$$\Rightarrow x_{n+1}-x_n=\frac{(x_n-2)^2}{x_n^{\alpha}-x_n+6}>0, \quad \forall x_n>2$$

ដូចនោះ (x_n) ជាស្វ៊ីតកើន: $3=x_1<x_2<\ldots<x_n<\ldots$

ឧបមាថា (x_n) ត្រូវទាល់លើ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a>3$

ដូចនោះ: $a=\dfrac{a^{\alpha+1}+2a+4}{a^{\alpha}-a+6}\Rightarrow a=2<3$ (មិនសមហេតុផល)

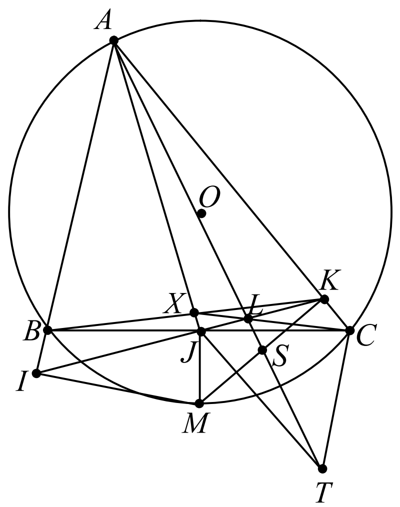
ទាញបាន (x_n) មិនទាល់លើ។ ដូចនេះ: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty$ ។

តាម $(*)\Rightarrow \dfrac{1}{x_{n+1}-2}=\dfrac{1}{x_n-2}-\dfrac{1}{x_n^{\alpha}+4}\Rightarrow \dfrac{1}{x_n^{\alpha}+4}=\dfrac{1}{x_n-2}-\dfrac{1}{x_{n+1}-2}$

$$\Rightarrow y_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^{2011}+4}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_n-2}-\frac{1}{x_{n+1}-2}\right)=\frac{1}{x_1-2}-\frac{1}{x_{n+1}-2}=1-\frac{1}{x_{n+1}-2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} y_n=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x_{n+1}-2}\right)=1$$

៣.



តាង $S=BC\cap LT$

តាមលទ្ធផលរបស់បន្ទាត់ *Simson* នោះបីចំនុច I,J,K រត់ត្រង់ជួរគ្នា។

តាមទ្រឹស្តីបទ *Ceva* ចំពោះត្រីកោណ AJC ជាមួយនឹងការប្រសព្វគ្នារបស់ AS, CX, JK , យើងបាន:

$$\frac{\overline{SC}}{\overline{SJ}}.\frac{\overline{XJ}}{\overline{XA}}.\frac{\overline{KA}}{\overline{KC}}=-1 \qquad (1)$$

តាមទ្រឹស្តីបទ *Menelaus* ចំពោះត្រីកោណ AJC ជាមួយនឹងការរត់ត្រង់ជួរគ្នារបស់ B, X, K ,យើងបាន:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BJ}}.\frac{\overline{XJ}}{\overline{XA}}.\frac{\overline{KA}}{\overline{KC}}=1 \qquad (2)$$

តាម $(1)\,\&\,(2)$, និង J ជាចំនុចកណ្តាលរបស់ BC , ទាញបាន $\frac{\overline{SC}}{\overline{SJ}}=-\frac{\overline{BC}}{\overline{BJ}}=-2$

តាមនោះយើងបាន $\frac{\overline{SB}}{\overline{SC}}=\frac{\overline{SC}}{\overline{SJ}}=-2 \qquad (3)$

ម្យ៉ាងទៀត, ដោយ $JT\perp MK, AC\perp MK$ នោះ $JT \parallel AC$

ដូចនេះ តាមទ្រឹស្តីបទតាលេស, យើងបាន $\frac{\overline{SA}}{\overline{ST}}=\frac{\overline{SC}}{\overline{SJ}} \quad (4)$

តាម $(3)\,\&\,(4)$ ទាញបាន $\frac{\overline{SB}}{\overline{SC}}=\frac{\overline{SA}}{\overline{ST}}$

ហើយតាមទ្រឹស្តីបទតាលេស, ទាញបាន $CT \parallel AB$

ដោយ $IM\perp AB$, យើងបាន $IM\perp CT$, ទាញបាន បញ្ហាត្រូវស្រាយបញ្ជាក់។

៤. លក្ខខណ្ឌចាំបាច់: ឧបមាថា $u_n-2na^n\equiv 0 \pmod b$ ចំពោះគ្រប់ n ។

យើងបាន $u_3=2$ ។

ដោយ $u_n\equiv 2na^n \pmod b$ ចំពោះគ្រប់ n ។

$$\Rightarrow\begin{cases}u_1\equiv 2.a \pmod b\\ u_3\equiv 6.a^3 \pmod b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a\equiv 1 \pmod b\\ 6.a^3\equiv 2 \pmod b\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2a\equiv 1 \pmod b\\ 24.a^3\equiv 8 \pmod b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a\equiv 1 \pmod b\\ 3.(2a)^3\equiv 8.1 \pmod b\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2a\equiv 1 \pmod b\\ 3\equiv 8 \pmod b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a\equiv 1 \pmod b\\ 5\equiv 0 \pmod b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a\equiv 1 \pmod 5\\ b=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\ b=5\end{cases}$$

លក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់: យើងស្រាយបញ្ជាក់ថាគូ $(a,b)=(3,5)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌប្រធាន។

តាង $v_n=u_n-2n.3^n$

ដោយ $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$, នោះ $v_{n+2}=v_{n+1}+v_n-10.3^n(n+3)$

$\Rightarrow v_{n+2}=v_{n+1}+v_n \pmod 5$ ចំពោះគ្រប់ $n=1,2,3,\ldots$

ដោយ $v_1=-5\equiv 0 \pmod 5, v_2=-35\equiv 0\ (mod\ 5)$

$\Rightarrow v_n\equiv 0 \pmod 5$ ចំពោះគ្រប់ $n=1,2,3,\ldots$

ទាញបាន $u_n-2n.3^n \,\vdots\, 5$ ។

៥. ឧបមាថា មិនមានមនុស្សបីនាក់ណាដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សំណើរប្រធានទេ។

តាមទ្រឹស្តីបទ *Dirichlet* នោះមានយ៉ាងតិចមនុស្ស 33 នាក់មកពីទីក្រុងដូចគ្នា។ ក្នុងនោះ មនុស្ស 33 នាក់នេះ មានយ៉ាងតិច 9 នាក់ធ្វើការងារដូចគ្នា។

ពិនិត្យមនុស្ស 5 នាក់ក្នុងចំនោម 9 នាក់ខាងលើ, តាមបំរាប់ ត្រូវមានមនុស្សពីរនាក់មានអាយុស្មើគ្នាគឺ

តាងដោយ A_1 និង B_1 ។
មិនគិត A_1, B_1 សិន, ពិនិត្យមនុស្ស 5 នាក់នៅក្នុង 7 នាក់ផ្សេងទៀត យើងក៏មានមនុស្សពីរនាក់ដែលមានអាយុស្មើគ្នា តាងដោយ A_2, B_2 ។
បន្តទៀត, មិនគិត A_2, B_2 ទៀត, ហើយពិនិត្យមនុស្ស 5 នាក់ផ្សេងទៀត យើងបានមនុស្សពីរនាក់ទៀតដែលមានអាយុស្មើគ្នាតាងដោយ A_3, B_3 ។
ដោយមិនមានមនុស្សបីនាក់ណា ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សំណើរប្រធាននោះ A_1, A_2, A_3 មានអាយុខុសគ្នាពីម្នាក់ទៅម្នាក់។
ពិនិត្យ មនុស្ស 5 នាក់មាន A_1, A_2, A_3 និង 2 នាក់ទៀតក្នុងចំនោមបីនាក់ផ្សេងទៀត យើងបានមនុស្ស 2 នាក់មានអាយុស្មើគ្នា។
ដោយ A_1, A_2, A_3 មិនអាចមានអាយុស្មើគ្នានឹងមនុស្សណាផ្សេងទៀតក្នុងចំនោមមនុស្សផ្សេងទៀត នោះយើងបាន មនុស្សពីរនាក់ថ្មីដែលមានអាយុស្មើគ្នាគឺ A_4, B_4 ។
ពិនិត្យមនុស្ស 5 នាក់ មាន A_1, A_2, A_3, A_4 និងមនុស្សដែលនៅសល់, ចុងក្រោយយើងបានមនុស្ស 2 នាក់ដែលមានអាយុស្មើគ្នា។
ករណីនេះ មិនអាចកើតមាន ព្រោះការឧបមាផ្ទុយពីការពិត, ទាញបានភាពផ្ទុយគ្នា។
ដូចនេះ យើងបានបញ្ហាត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រចាំខែណឺវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

វិញ្ញាសាស៊េរីទី៩

១. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ: $\begin{cases} \sqrt[3]{12y+19} = 64x^3 + 96y^2 + 232x - 93 \\ 17\sqrt{5-x} + 3y\sqrt{4-y} = 14\sqrt{4-y} + 3x\sqrt{5-x} \end{cases}$

២. គេឲ្យស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ: $\begin{cases} u_1 = -\dfrac{2}{5} \\ 25u_{n+1}u_n + 15u_n + 10 = \sqrt{25u_n^2 + 30u_n + 10} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$

កំណត់តួទូទៅ u_n និងគណនា $\lim u_n$ ។

៣. គេឲ្យត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណស្រួច មិនសមបាតមាន D, E រៀងគ្នាជាបណ្តាចំនុចស្ថិតនៅលើជ្រុង AB, AC យ៉ាងណាឲ្យ DE ស្របនឹង BC ។ រង្វង់ k ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ADE កាត់បណ្តាអង្កត់ BE, CD រៀងគ្នាត្រង់ M និង N ។ ឧបមាថា AM, AN កាត់ BC រៀងគ្នាត្រង់ P និង Q យ៉ាងណាឲ្យ $BC = 2PQ$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំនុចកណ្តាលរបស់ធ្នូ DE ដែលមិនមានផ្ទុកចំនុច A របស់រង្វង់ k ស្ថិតនៅលើ BC ។

៤. រកគ្រប់អនុគមន៍ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់: $f(xf(y) + f(x)) = 2f(x) + xy;\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ ។

៥. រកឬសជាចំនួនគត់របស់សមីការ $\dfrac{x^7 - 1}{x - 1} = y^5 - 1$ ។

៦. គេលាបផ្ទៃកខាងក្រៅរបស់គូបមួយ ដោយពណ៌ផ្កាឈូក ហើយអារទៅជា 64 គូបតូចៗ។ ក្រោយមក, ពីបណ្តាគូបតូចៗ, គេរៀបវាដើម្បីបង្កើតបានជាគូបចាស់, តែពេលនោះ គឺបណ្តាគូបតូចៗ អាចប្រែប្រួលទីតាំង និងវិលបាន។ តើមានប៉ុន្មានរបៀប ក្នុងការរៀបបណ្តាគូបតូចៗ ដើម្បីបានជាគូបធំដែលមានផ្ទៃខាងក្រៅលាបដោយពណ៌ផ្កាឈូក។

ចំលើយ

១. លក្ខខណ្ឌ: $x\le 5; y\le 4$

$17\sqrt{5-x}+3y\sqrt{4-y}=14\sqrt{4-y}+3x\sqrt{5-x}$

$\Leftrightarrow \left(3(5-x)+2\right)\sqrt{5-x}=\left(3(4-y)+2\right)\sqrt{4-y}$ (1)

ពិនិត្យអនុគមន៍: $f(t)=(3t+2)\sqrt{t}$ ចំពោះ $t\ge 0$

$f'(t)=3\sqrt{t}+\dfrac{3t+2}{2\sqrt{t}}>0,\ \forall t\ge 0$ នោះ f ជាអនុគមន៍កើននៅលើ $[0;+\infty)$

ដូចនោះតាម $(1): f(5-x)=f(4-y)\Leftrightarrow 5-x=4-y\Leftrightarrow y=x-1$

ជំនួសចូលសមីការ: $\sqrt[3]{12y+19}=64x^3+96y^2+232x-93$

យើងបាន: $\sqrt[3]{12x+7}=64x^3+96x^2+40x+3$ (2)

បូកចូលអង្គទាំងពីររបស់សមីការ (2) និង $12x+7$, យើងបាន:

$\sqrt[3]{12x+7}+12x+7=64x^3+96x^2+52x+10$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{12x+7}+12x+7=(4x+2)+(4x+2)^3$ (3)

ពិនិត្យអនុគមន៍ $f(t)=t^3+t$, អនុគមន៍ $f(t)$ កើននៅលើ $\mathbb{R}$

សមីការ $(3)\Leftrightarrow f\left(\sqrt[3]{12x+7}\right)=f(4x+2)$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{12x+7}=4x+2\Leftrightarrow (4x+2)^3-(12x+7)=0$

$\Leftrightarrow 64x^3+96x^2+36x+1=0\Leftrightarrow 8(2x+1)^3-6(2x+1)-1=0$

តាង $u=2x+1$, យើងបានសមីការ: $8u^3-6u-1=0$ (4)

ដំបូងយើងត្រូវរកគ្រប់ឫស $u\in[-1;1]$

តាង $u=\cos t$ ចំពោះ $t\in[0;\pi]$, សមីការ (3) ក្លាយទៅជា:

$2\left(4\cos^3 t-3\cos t\right)=1\Leftrightarrow \cos 3t=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow t=\pm\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$

ដោយ $t\in[0;\pi]$ នោះ $t\in\left\{\dfrac{\pi}{9};\dfrac{5\pi}{9};\dfrac{7\pi}{9}\right\}$

ដូចនេះ សំនុំឫសរបស់សមីការ (2) គឺ: $\left\{\dfrac{\cos\frac{\pi}{9}-1}{2};\dfrac{\cos\frac{5\pi}{9}-1}{2};\dfrac{\cos\frac{7\pi}{9}-1}{2}\right\}$

ដូចនេះសំនុំចំលើយរបស់ប្រព័ន្ធគឺ:

$$\left\{\left(\dfrac{\cos\frac{\pi}{9}-1}{2};\dfrac{\cos\frac{\pi}{9}-3}{2}\right),\left(\dfrac{\cos\frac{5\pi}{9}-1}{2};\dfrac{\cos\frac{5\pi}{9}-3}{2}\right),\left(\dfrac{\cos\frac{7\pi}{9}-1}{2};\dfrac{\cos\frac{7\pi}{9}-3}{2}\right)\right\}$$

២. យើងមាន: $25u_{n+1}u_n+15u_{n+1}+15u_n+10=\sqrt{25u_n^2+30u_n+10}$

$\Leftrightarrow (5u_{n+1}+3)(5u_n+3)=\sqrt{(5u_n+3)^2+1}-1$

ពិនិត្យស្វ៊ីត (v_n) កំណត់ដោយ: $v_n=5u_n+3$ ។ ដូចនេះ យើងបាន:

$$\begin{cases} v_1 = 5u_1+3=1 \\ v_{n+1}v_n = \sqrt{v_n^2+1}-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1=1 \\ v_{n+1} = \dfrac{\sqrt{v_n^2+1}-1}{v_n} \end{cases}$$

យើងស្រាយបញ្ជាក់: $v_n = \tan\dfrac{\pi}{2^{n+1}} \quad (n\in\mathbb{N}^*) \quad (*)$

យើងបាន: $v_1 = \tan\dfrac{\pi}{4} = 1$ ។ ដូចនេះ $(*)$ ពិតចំពោះ $n=1$ ។

ឧបមាថា $(*)$ ពិតចំពោះ $n=k$, គឺថា: $v_k = \tan\dfrac{\pi}{2^{k+1}}$

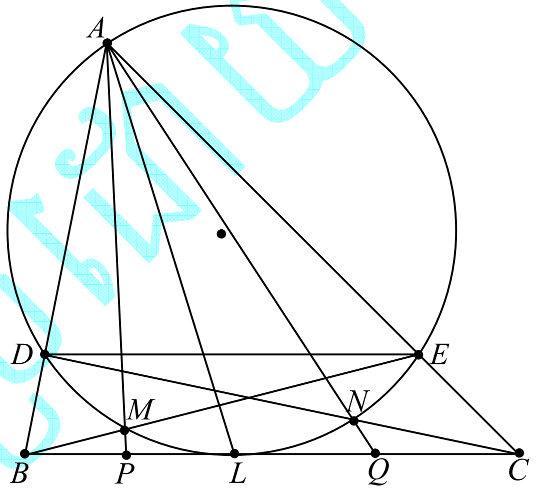
យើងបាន: $v_{k+1} = \dfrac{\sqrt{v_k^2+1}-1}{v_k} = \dfrac{\sqrt{\tan^2\dfrac{\pi}{2^{k+1}}+1}-1}{\tan\dfrac{\pi}{2^{k+1}}} = \tan\dfrac{\pi}{2^{k+2}}$

ដូចនេះ $(*)$ ពិតចំពោះ $n=k+1$ ។

ដូចនេះ តាមទ្រឹស្តីបទវិចារអនុមានរួម, យើងបាន: $v_n = \tan\dfrac{\pi}{2^{n+1}} \quad (n\in\mathbb{N}^*)$

និង $\lim u_n = \lim\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{2^{n+1}}-3}{5} = \dfrac{-3}{5}$ ។

៣.



យើងមាន $\widehat{EBC} = \widehat{DEB} = \widehat{DAM}$ នោះ: $BP^2 = PM.PA$ ។

ដូចគ្នាដែរ, យើងក៏មាន $QC^2 = QN.QA$ ។

ឧបមាថា L ជាចំនុចឆ្លុះនឹង B ធៀបនឹង P នោះ: L ក៏ជាចំនុចឆ្លុះនឹង C ធៀបនឹង Q ។

យើងបាន $PL^2 = PM.PA$ នោះ: M ស្ថិតនៅលើរង្វង់ (k') កាត់តាម A ហើយប៉ះនឹង BC ត្រង់ L ។

ដូចគ្នាដែរ, N ស្ថិតនៅលើរង្វង់ (k') ។ ទាញបាន (k') កាត់តាមចំនុច A, M និង N នោះវាត្រួតគ្នានឹង (k), គឺថា (k) ប៉ះនឹង BC ត្រង់ L ។

ម្យ៉ាងទៀត, យើងក៏មាន $\dfrac{BL^2}{CL^2} = \dfrac{BD.BA}{CE.CA} = \dfrac{BA^2}{CA^2} \Rightarrow \dfrac{BL}{CL} = \dfrac{BA}{CA}$ រឺ L ជាជើងបន្ទាត់ពុះមុំ A របស់ ΔABC ។

ដូចនេះ L គឺជាចំនុចកណ្តាលរបស់ធ្នូ DE ដែលមិនមានផ្ទុកចំនុច A របស់រង្វង់ (k) ហើយ L ស្ថិតលើ BC ។

៤. រកគ្រប់អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់: $f(xf(y)+f(x))=2f(x)+xy;\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ (1)

$f(x)$ ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់។ ពិតជាដូចនេះ

ឧបមាថា $f(a)=f(b)$, រៀងគ្នាឲ្យ $x=1; y=a$ និង $x=1; y=b$ ចូលទៅក្នុង (1)

តាមនោះទាញបាន $a=b$

$f(x)$ ជាអនុវត្តន៍ពេញ។ ពិតជាដូចនេះ, ជំនួស $x=1; y=x-2f(1)$ ចូល (1), យើងបាន:

$$f(f(x-2f(1))+f(1))=x$$ ។ ដូចនេះ $f(x)$ ជាអនុវត្តន៍ពេញ។

ពេលនោះ, មានពីរចំនួន a,u យ៉ាងណាឲ្យ: $f(0)=a$ និង $f(u)=0$

ជំនួស $x=u$ និង $y=0$ ចូល (1), យើងបាន: $f(au)=0=f(u)$ ទាញបាន $au=u$

បើ $u=0$, ក្នុង (1) ជំនួស $y=0$, យើងបាន: $f(f(x))=2f(x)$

ដោយ $f(x)$ ជាអនុវត្តន៍ពេញនាំឲ្យ $f(x)=2x$ ។ អនុគមន៍នេះ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ (1) ។

ដូចនោះ $u\neq 0$ និង $a=1$ ។ ពេលនោះ, ក្នុង (1) ជំនួស $x=y=u$, យើងបាន $u=\pm 1$ ។

បើ $u=1$, ក្នុង (1) ឲ្យ $x=0; y=-1$, យើងបាន $0=2$ (មិនសមហេតុផល)

ដូចនោះ $a=1$ និង $u=-1$, យើងបាន: $f(-1)=0; f(0)=1$ ។

ជំនួស $x=0; y=-1$ ទាញបាន $f(1)=2$

ជំនួស $x=-1$ ចូល (1) ទាញបាន $f(-f(y))=-y$ រឺ $f(-f(x))=-x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ ។

ជំនួស $y=-f(1)$ ចូល (1) ទាញបាន $f(f(x)-x)=2(f(x)-x)$

តាង $f(z)=f(x)-x$ (ករណីនេះតែងអាចកើតមាន ព្រោះ $f(x)$ ជាអនុវត្តន៍ពេញ)។

យើងបាន $f(f(z))=2f(z)$ (2)

ជំនួស $x=z; y=-1$ ចូល (1) យើងបាន: $f(f(z))=2f(z)-z$, បូករួមនឹង (2) យើងបាន: $z=0$ ។

ទាញបាន $f(x)=x+1$, ផ្ទៀងផ្ទាត់ឡើងវិញឃើញថាពិត។

ដូចនេះ $f(x)=x+1$ ។

៥. តាង p ជាតួចែកបឋមរបស់ $\dfrac{x^7-1}{x-1}=x^6+x^5+...+x+1$

យើងបានពីរករណី

+ បើ p ជាតួចែករបស់ $(x-1)$ នោះ

$$\frac{x^7-1}{x-1}=x^6+x^5+...+x+1\equiv 1+1+...+1\equiv 7\ (\text{mod } p)\Rightarrow p=7$$

+ បើ p មិនមែនជាតួចែករបស់ $(x-1)$ នោះយើងបាន: $ord_p x=7 \Rightarrow p\equiv 1\ (\text{mod } 7)$

($ord_p x$, ត្រង់ចំនុចនេះ គឺបកប្រែតាមច្បាប់ដើមទេ ព្រោះគេសរសេរមកដូចនេះដែរ)

ដូចនេះ គ្រប់តួចែកជាចំនួនគត់ d របស់ $\dfrac{x^7-1}{x-1}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $d\equiv 0,1\ (\text{mod } 7)$

ឧបមាថា (x,y) ជាឫសរបស់សមីការដែលឲ្យ។

យើងបាន $y^5-1=(y-1)(y^4+y^3+y^2+y+1)$

ទាញបាន $y-1\equiv 1\ (\text{mod } 7)$ ហើយ $y^4+y^3+y^2+y+1\equiv 0,1\ (\text{mod } 7)$

ពេល $y-1\equiv 1\ (\text{mod } 7)\Rightarrow y\equiv 1,2\ (\text{mod } 7)$

$\Rightarrow y^4+y^3+y^2+y+1\equiv 3,5\ (\text{mod } 7)$ (ផ្ទុយពីការពិត)

ដូចនេះ សមីការគ្មានឫស។

៦. + យើងឃើញថា ក្នុង 64 គូបតូចៗ មាន 4 ប្រភេទដូចខាងក្រោម: 8 គូបត្រូវបានលាបពណ៌នៅមុខ 3, មាន 24 គូប ត្រូវបានលាបពណ៌នៅមុខ 2, មាន 24 គូបត្រូវបានលាបពណ៌នៅមុខ 1, មាន 8 គូបដែលមិនមានលាបពណ៌នៅមុខណាសោះ។

+ ដូចនេះ, ចង់ឲ្យបានគូបដែលមានមុខត្រូវបានលាបពណ៌ដូចពេលដើមគឺ:

◦ បណ្ដាគូបតូចៗដែលមានលាបពណ៌នៅមុខ 3 ត្រូវដាក់នៅកំពូល ហើយដុំគូបនីមួយៗអាចដាក់តាម 3 របៀប, នោះមាន $3^8.8!$ របៀប។

◦ បណ្ដាគូបតូចដែលមានមុខ 2 ត្រូវបានលាបពណ៌ ត្រូវដាក់តាមជ្រុងហើយដុំគូបនីមួយៗអាចដាក់តាម 2 របៀប, នោះមាន $2^{24}.24!$ របៀប។

◦ បណ្ដាគូបតូចៗដែលមានមុខ 1 ត្រូវបានលាបពណ៌ គឺមាន $4^{24}.24!$ របៀបរៀប។

◦ បណ្ដាគូបតូចៗដែលមានមុខមិនមានលាបពណ៌សោះ មាន $24^8.8!$ របៀបរៀប។

ដូចនេះ មានទាំងអស់គឺ $3^8.8!+2^{24}.24!.4^{24}.24!.24^8.8!=(3^8.2^{48}.24!8!)^2$ របៀប។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

វិញ្ញាសាស្នើទី១០

១. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការ: $\begin{cases} \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1 \\ y+\dfrac{y}{\sqrt{x^2-1}}\geq\dfrac{35}{12} \end{cases}$ (ចំពោះ $x,y\in\mathbb{R}$)

២. គេឲ្យស្វ៊ីត $\{U_n\}$ កំណត់ដោយ: $U_1=a, U_{n+1}=4U_n(1-U_n)$។ រកគ្រប់តំលៃរបស់ a ដើម្បីឲ្យ $U_{2012}=0$។

៣. គេឲ្យ I និង O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង និងចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC។ រង្វង់ចារឹកក្នុងមុំ A ប៉ះនឹង AB, AC, BC រៀងគ្នាត្រង់ K, M, N។ តាង P ជាចំនុចកណ្ដាលរបស់ KM។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើចំនុច P ស្ថិតនៅលើរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC នោះ I, O, N រត់ត្រង់ជួរគ្នា។

៤. គេឲ្យអនុគមន៍: $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$ កំណត់ដោយលក្ខខណ្ឌ:

$a)$ $f(1)=2$

$b)$ $f(n+1)=[f(n)]^2-f(n)+1$ ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}^*$។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n\geq 2$, គេបាន: $1-\dfrac{1}{2^{2^{n-1}}}<\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{f(k)}<1-\dfrac{1}{2^{2^n}}$។

៥. គេឲ្យប្រលេពីប៉ែតកែងមួយ មានប្រវែងវិមាត្រទាំងបីជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ។ បណ្ដាមុខរបស់ប្រលេពីប៉ែតត្រូវបានលាបដោយពណ៌ខៀវ។ ចែកប្រលេពីប៉ែតកែងនេះ ជាដុំគូបឯកតា ដោយបណ្ដាប្លង់ស្របនឹងបណ្ដាមុខរបស់ប្រលេពីប៉ែត។ រកបណ្ដាវិមាត្ររបស់ប្រលេពីប៉ែត, ដោយដឹងថា ចំនួនបណ្ដាគូបឯកតាដែលមិនមានមុខណាត្រូវបានលាបពណ៌ខៀវសោះ ស្មើនឹង $\dfrac{1}{3}$ នៃផលបូកបណ្ដាគូបឯកតានោះ។

៦. គេឲ្យបណ្ដាចំនួនពិត a_i, b_i $(i=1,2,3,...,2013)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់: $a_i^2+b_i^2=1,\ \forall i=1,2,3,...,2013$។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា មានគូលេខសន្ទស្សន៍ (p,q) ដែល $1\leq p<q\leq 2013$ យ៉ាងណាឲ្យ:

$a_p.a_q+b_p.b_q>0,9999$។

ចំលើយ

១. លក្ខខណ្ឌ $x<-1 \vee x>1$ ។ $\begin{cases} \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1 & (1) \\ y+\dfrac{y}{\sqrt{x^2-1}} \geq \dfrac{35}{12} & (2) \end{cases}$

យើងមាន: $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=1$ ចំពោះ $\forall x \in \mathbb{R}$

តាម $(1) \Rightarrow y+\sqrt{y^2+1}=\sqrt{x^2+1}-x \qquad (3)$

ដូចគ្នាដែរ: $(1) \Rightarrow x+\sqrt{x^2+1}=\sqrt{y^2+1}-y \qquad (4)$

តាម $(3),(4) \Rightarrow y=-x$

ជំនួសចូល (2): $y+\dfrac{y}{\sqrt{y^2-1}} \geq \dfrac{35}{12} \qquad (5)$

យើងគ្រាន់តែពិនិត្យចំពោះ $y>1$

$(5) \Leftrightarrow y+\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{y^2}}} \geq \dfrac{35}{12} \qquad (5')$

តាង $\dfrac{1}{y}=\sin\alpha$ ចំពោះ $\alpha \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ នោះ $(5') \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sin\alpha}+\dfrac{1}{\cos\alpha} \geq \dfrac{35}{12}$

$\Leftrightarrow 12(\sin\alpha+\cos\alpha)-35\sin\alpha.\cos\alpha \geq 0$

ចំពោះ $t=\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$ ដោយ $\alpha \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ នាំឲ្យ $1<t\leq\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 35t^2-24t-35 \leq 0 \Leftrightarrow -\dfrac{5}{7} \leq t \leq \dfrac{7}{5}$

ផ្ទៀបនឹងលក្ខខណ្ឌ $\Rightarrow 1<t\leq\dfrac{7}{5} \Leftrightarrow 1<\sin\alpha+\cos\alpha \leq \dfrac{7}{5}$

ដោយ $\alpha \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin\alpha+\cos\alpha>1$ (ផ្ទៀងផ្ទាត់ជានិច្ច)

$\sin\alpha+\cos\alpha \leq \dfrac{7}{5} \qquad (6)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{y}+\dfrac{\sqrt{y^2-1}}{y} \leq \dfrac{7}{5} \Leftrightarrow \sqrt{y^2-1} \leq \dfrac{7}{5}y-1 \Leftrightarrow 1<y\leq\dfrac{5}{4} \vee y \geq \dfrac{5}{3}$

ដូចនេះ ចំលើយរបស់ប្រព័ន្ធដែលឲ្យគឺ: $\begin{cases} 1<y\leq\dfrac{5}{4} \vee y\geq\dfrac{5}{4} \\ x=-y \end{cases}$

២. បើ $a<0$ នោះ $U_n<0$ ចំពោះ $\forall n \geq 2$

បើមាន $U_n>1$ ចំពោះ $n<2012$ ពេលនោះ $U_{n+1}<0$ សមភាព $U_{2012}=0$ មិនអាចកើតមាន។

នោះយើងគ្រាន់តែពិនិត្យ $U_n \geq 0$ ចំពោះ $\forall n \geq 2$ ។

ពេលនោះ $U_{n+1}-4U_n(1-U_n) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq U_n \leq 1$

ដូចនេះ $0 \leq a \leq 1$ ។

តាង: $a=\sin^2\varphi$ ចំពោះ $\varphi\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

$U_2=4\sin^2\varphi(1-\sin^2\varphi)=sin^2 2\varphi$

ប្រើវិធីស្រាយបញ្ជាក់តាមវិចារអនុមានរួម យើងបាន: $U_n=\sin^2(2^{n-1}\varphi)$

ដូចនោះ $U_{2012}=\sin^2(2^{2011}\varphi)$

$$U_{2012}=0\Leftrightarrow\sin(2^{2011}\varphi)=0\Leftrightarrow 2^{2011}\varphi=k\pi\Leftrightarrow\varphi=\frac{k.\pi}{2^{2011}}\,(k\in\mathbb{Z})$$

ចំពោះ $\varphi\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\Leftrightarrow 0\le\frac{k.\pi}{2^{2011}}\le\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 0\le k\le 2^{2010}$

សរុបមក: $a=\sin^2\varphi,\ \varphi=\frac{k.\pi}{2^{2011}}$ ចំពោះ $k\in\mathbb{Z}$ និង $0\le k\le 2^{2010}$ ។

៣. តាង $a=BC, b=AC$ និង $c=AB\Rightarrow p=\frac{a+b+c}{2}$ ។

ដោយមិនធ្វើឲ្យបាត់លក្ខណៈទូទៅ, ឧបមាថា $b\ge c$ ។

តាង Q ជាចំនុចប្រសព្វទីពីរ របស់ KM និងរង្វង់ (O) ។ ពេលនោះ $KP<KQ$ ។

$$m=KP=PM,\ n=PQ.KB=p-c,\ MC=p-b,\ KA=MA=p\text{ ។}$$

អនុវត្តន៍..........ចំពោះចំនុច K និង M ធៀបនឹងរង្វង់ (O) យើងបាន:

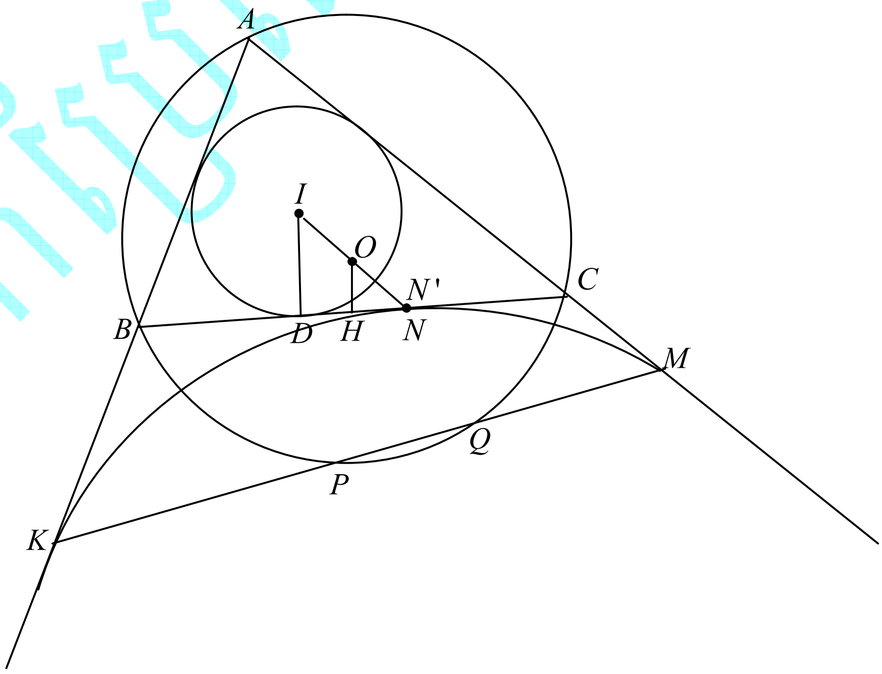
$$KP.KQ=KB.KA\Leftrightarrow m(m+n)=p.(p-c)\quad(1)$$

$$MP.MQ=MC.MA\Leftrightarrow m(m-n)=p.(p-b)\quad(2)$$

$(1)+(2)\Rightarrow m^2=\frac{p.a}{2}\Leftrightarrow KM^2=m^2=\frac{ap}{2}$

ដោយ $KM^2=p^2+p^2-2p.p.\cos A$

$$\Rightarrow a=p\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\Leftrightarrow abc=2p.p.(p-b)(p-c)\quad(*)$$



D,H រៀងគ្នាជាចំនោលកែងរបស់ I,O ទៅលើ BC (H ជាចំនុចកណ្ដាល BC)។
IO កាត់ BC ត្រង់ N'។
ដោយ $BD = NC = p-b$ នោះ: $N \equiv N' \Leftrightarrow HD = HN' \Leftrightarrow DH = 2OH \Leftrightarrow r = 2.R\cos\alpha$

$\Leftrightarrow \frac{r}{2R} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \Leftrightarrow \frac{2S^2}{pabc} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\Leftrightarrow 4p(p-a)(p-b)(p-c) = pa(b^2+c^2-a^2)$

ជំនួស (*) ចូលយើងបាន:

$\Leftrightarrow 2(p-a)bc = p(b^2+c^2-a^2) \Leftrightarrow 2(p-a)bc - 2pbc = p[(b-c)^2-a^2]$

$\Leftrightarrow -2abc = p(b-c-a)(b-c+a) \Leftrightarrow abc = 2p.p.(p-b)(p-c)$ ។ ពិតតាម (*)

៤. តាម $f(n+1) = [f(n)]^2 - f(n) + 1$ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

យើងបាន: $f(n+1) - f(n) = [f(n)-1]^2$, ដោយ $f(1) = 2$,
នោះតាមវិធីវិចារអនុមានរួម យើងឃើញថា $f(n)$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{N}^*$ យកតំលៃស្ថិតនៅក្នុង $\mathbb{N}^*$ មិនតូចជាង 2 ។
ជាពិសេស $f(n)-1 \geq 1$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}^*$
យើងបំលែង (b) ទៅជារាង: $f(n+1)-1 = [f(n)]^2 - f(n) = f(n)[f(n)-1]$ (1)

ទាញបាន $\frac{1}{f(n+1)-1} = \frac{1}{f(n)[f(n)-1]} = \frac{1}{f(n)-1} - \frac{1}{f(n)}$

រឺ $\frac{1}{f(n)} = \frac{1}{f(n)-1} - \frac{1}{f(n+1)-1}$

នោះ: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)} = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{f(k)-1} - \frac{1}{f(k+1)-1}\right] = 1 - \frac{1}{f(n+1)-1}$

ដើម្បីបានលទ្ធផលដែលត្រូវរក, យើងត្រូវស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 2$ យើងបាន:

$$2^{2^{n-1}} < f(n+1) - 1 < 2^{2^n}$$

រឺ $\Leftrightarrow 2^{2^{n-1}} + 1 \leq f(n+1) - 1 < 2^{2^n}$ (2) (ព្រោះ $f(n+1)-1 \in \mathbb{N}^*$)

ពិតជាដូចនេះ, យើងមាន:

$$f(2) = [f(1)]^2 - f(1) + 1 = 2^2 - 2 + 1 = 3$$

$$f(3) = [f(2)]^2 - f(2) + 1 = 3^2 - 3 + 1 = 7$$

គឺថា $f(3) - 1 = 6$, ដូចនេះ $4 + 1 = 2^{2^1} + 1 < f(3) - 1 < 2^{2^2} = 16$

ក្លាយទៅជា (2) ពិតចំពោះគ្រប់ចំនួន $n > 2$ ។
ដូចនោះ គឺវាក៏ពិតចំពោះ $n+1$ ដែរ, ព្រោះថា:

$$f(n+2) - 1 = f(n+1)[f(n+1)-1] < 2^{2^n}(2^{2^n} - 1) < 2^{2^n}.2^{2^n} = 2^{2^{n+1}}$$

ហើយ $f(n+2) - 1 = f(n+1)[f(n+1)-1] > 2^{2^{n-1}}(2^{2^{n-1}} + 1) = 2^{2^n} + 2^{2^n} > 2^{2^n} + 1$ ។

៥. ឧបមាថា ប្រវែងវិមាត្រទាំងបីរបស់ប្រលេពីប៉ែតគឺ $x \leq y \leq z$ ។

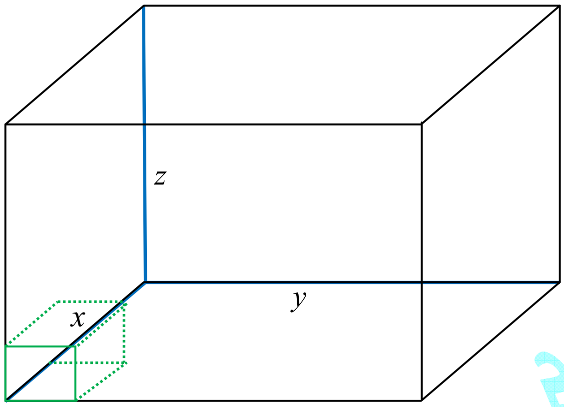
តាមបំរាប់, ទាញបាន $x \geq 3$ និង $(x-2)(y-2)(z-2) = \frac{1}{3} z.y.z$

ដោយ: $f(t) = \frac{t-2}{t}$ កើននោះលើ $(0;+\infty)$ ដូចនោះ: $\frac{x-2}{x} \leq \frac{y-2}{y} \leq \frac{z-2}{z}$

ពេល $x\ge 7$ គឺ $\dfrac{(x-2)(y-2)(z-2)}{xyz}\ge\left(\dfrac{5}{7}\right)^3>\dfrac{1}{3}\Rightarrow x\ge 7$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

ទាញបាន $x\le 6$

នាំឲ្យ $3\le x\le 6$, នោះយើងយក: $x=3, x=4, x=5$ រឺ $x=6$



$+$ បើ $x=3$ នាំឲ្យ $(y-2)(z-2)=yz$, ករណីនេះមិនអាចកើតមាន។

$+$ បើ $x=4$, យើងបាន $2(y-2)(z-2)=\dfrac{4}{3}yz\Leftrightarrow(y-6)(z-6)=24$

ពេលនោះ: $(x,y,z)=(4;7;30),(4;8;18),(4;9;14),(4;10;12)$

$+$ បើ $x=5$, យើងបាន $3(y-2)(z-2)=\dfrac{5}{3}yz\Leftrightarrow(2y-9)(2z-9)=45$

ពេលនោះ: $(x,y,z)=(5;5;27),(5;6;12),(5;7;9)$

$+$ បើ $x=6$, យើងបាន $4(y-2)(z-2)=2yz\Leftrightarrow(y-4)(z-4)=8$

យើងបានឫសតែមួយគត់គឺ $(6;6;8)$

សរុបមក, មាន 8 លទ្ធផលចំពោះវិមាត្រទាំងបីរបស់ប្រលេពីប៉ែតកែងគឺ:

$$(4;7;30),(4;8;18),(4;9;14),(4;10;12),(5;5;27),(5;6;12),(5;7;9),(6;6;8)$$ ។

៦. ដោយ $a_i^2+b_i^2=1$ នោះយើងសរសេរ បណ្តាចំនួន a_i,b_i ក្រោមរាង:

$a_i=\cos\alpha_i, b_i=\sin\alpha_i$ ចំពោះ $(\alpha_i\in[0;2\pi))$ ។

យើងបាន: $a_p.a_q=b_p.b_q=\cos(\alpha_p-\alpha_q)$

ចែកចន្លោះ $[0;2\pi)$ ជា 2012 ចន្លោះ, ចន្លោះនីមួយៗមានប្រវែង $d=\dfrac{\pi}{1006}$ ។

$$[9;2\pi)=\left[0;\frac{\pi}{1006}\right)\cup\left[\frac{\pi}{1006};\frac{2\pi}{1006}\right)\cup\ldots\cup\left[\frac{2011\pi}{1006};2\pi\right)$$

តាមវិធាន *Dirichlet* នោះយើងបានពីរចំនួន α_p,α_q ស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះតែមួយ។

យើងបាន: $0<\left|\alpha_p-\alpha_q\right|<\dfrac{\pi}{1006}$

$$a_pa_q+b_pb_q=\cos(\alpha_p-\alpha_q)>\cos\frac{\pi}{1006}$$

ដោយ $\cos\dfrac{\pi}{1006}=1-2\sin^2\dfrac{\pi}{2012}>1-2\left(\dfrac{\pi}{2012}\right)^2>0,9999$ (ព្រោះ $\sin x<x,\forall x>0$)

ដូចនេះ $a_p.a_q + b_p b_q > 0,9999$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

វិញ្ញាសាស្នើទី១១

១. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការដែលមានអញ្ញត្តិ x, y, z (ក្នុងនោះ $\sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma \neq 0$)

$$\begin{cases} x.\sin\alpha + y.\sin 2\alpha + z.\sin 3\alpha = \sin 4\alpha \\ x.\sin\beta + y.\sin 2\beta + z.\sin 3\beta = \sin 4\beta \\ x\sin\gamma + y.\sin 2\gamma + z.\sin 3\gamma = \sin 4\gamma \end{cases}$$

២. គេឲ្យស្វ៊ីត (u_n) ត្រូវបានកំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2^{u_n}, n = 1, 2, ... \end{cases}$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះ m ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានណាដោយដែលគេឲ្យ គឺមាន n_0, c ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានយ៉ាងណាឲ្យ $u_n \equiv c \pmod m$, ចំពោះគ្រប់ $n > n_0$ ។

៣. គេឲ្យត្រីកោណ ABC មានបរិមាត្រស្មើ 1, កាំរង្វង់ចារឹកក្នុងស្មើ r, ចារឹកក្រៅស្មើ R, និងប្រវែងជ្រុងទាំងបីរៀងគ្នាគឺ a, b, c ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\dfrac{a}{\sqrt{1-a}} + \dfrac{b}{\sqrt{1-b}} + \dfrac{c}{\sqrt{1-c}} \geq \sqrt{\dfrac{2}{1+4r(r+4R)}}$ ។

៤. គេឲ្យពហុធា $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0$, ចំពោះ $a_i \in \mathbb{R}, i = \overline{0, n-1}$

ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ: $|P(0)| = P(1)$ និងមាន n ឫសជាចំនួនពិត x_i $(i = 1, 2, ..., n)$ សុទ្ធតែស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះ $(0;1)$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $x_1.x_2.....x_n \leq \dfrac{1}{2^n}$ ។

៥. កំណត់គូចំនួន (a,b) ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $2a+1$ និង $2b-1$ បឋមរវាងគ្នា ហើយ $a+b$ ជាតួចែករបស់ $4ab+1$ ។

៦. ក្នុងកិច្ចប្រជុំមួយមានអ្នកតំណាង 100 នាក់ចូលរួម។ ក្នុងនោះមាន 15 នាក់ជាជនជាតិបារាំង, ដែលម្នាក់ៗស្គាល់គ្នានឹងអ្នកតំណាង 70 នាក់យ៉ាងតិច និងមាន 85 នាក់ជាជនជាតិអាល្លឺម៉ង់, ដែលម្នាក់ៗស្គាល់គ្នានឹងអ្នកតំណាងមិនលើសពី10 នាក់។ ពួកគាត់ត្រូវបានបែងចែកឲ្យស្នាក់ក្នុង 21 បន្ទប់។ ស្រាយបញ្ជាក់ថាមានបន្ទប់មួយ ដែលមិនមានគូណាស្គាល់គ្នា។

ចំលើយ

១. អនុវត្តន៍រូបមន្ត $\sin 2a = 2.\sin a.\cos a$

$\sin 3a = 3.\sin a - 4\sin^3 a$.

$\sin 4a = (8.\cos^3 a - 4\cos a)\sin a$.

ប្រព័ន្ធសមីការត្រូវបានសរសេរជា: $\begin{cases} x + 2y.\cos\alpha + z(4\cos^2\alpha - 1) = 8\cos^3\alpha - 4\cos\alpha \\ x + 2y.\cos\beta + z(4\cos^2\beta - 1) = 8\cos^3\beta - 4\cos\beta \\ x + 2y.\cos\gamma + z(4\cos^2\gamma - 1) = 8\cos^3\gamma - 4\cos\gamma \end{cases}$

ដូចនោះ, $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ គឺជាឫសទាំងបីរបស់សមីការ: $8t^3 - 4zt^2 - (4+2y)t + z - x = 0$

តាមទ្រឹស្តីបទវៀែត, យើងបាន: $\begin{cases}\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\dfrac{z}{2}\\ \cos\alpha.\cos\beta+\cos\beta.\cos\gamma+\cos\gamma.\cos\alpha=\dfrac{-z-y}{4}\\ \cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma=\dfrac{z-x}{8}\end{cases}$

ប្រព័ន្ធសមីការមានចំលើយគឺ: $\begin{cases}x=8\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma+2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\\ y=-4(\cos\alpha.\cos\beta+\cos\beta.\cos\gamma+\cos\gamma.\cos\alpha)-2\\ z=2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\end{cases}$

២. យើងស្រាយបញ្ជាក់ដោយវិចារអនុមានរួមតាម m ។ ងាយនឹងបង្ហាញថាចំពោះ $m=1$

ឧបមាថាលំហាត់ពិតចំពោះ $m=k$ ។

ករណី $m=k+1$ ជាចំនួនសេស។ ពេលនោះ $2^{\varphi(m)}\equiv 1\pmod m$ ។

ដោយ $\varphi(m)<m$ នោះតាមការសន្មត់ដោយវិចារអនុមានរួម, មាន n_0, មាន c ដើម្បីឲ្យ

$u_n\equiv c\pmod{\varphi(m)}$, ចំពោះគ្រប់ $n>n_0$ ។

ពេលនោះ $u_{n+1}=2^{u_n}\equiv 2^c\pmod m$, ចំពោះគ្រប់ $n>n_0$ ។

ករណី $m=k+1$ ជាចំនួនគូ។

\+ បើ $m=2^r,(r\geq 1)$, ឃើញថា $u_n\equiv 0\pmod m$ ចំពោះ n ធំល្មម។

\+ បើ $m=2^r q$ ចំពោះ $r\geq 0$, q ជាចំនួនសេស។

ដោយ $2^r,q<m$ នោះមាន n_1,n_2,c_1,c_2 ដើម្បីឲ្យ

$u_n\equiv c_1\pmod{2^r}\ \ \forall n>n_1$ និង $u_n\equiv c_2\pmod q\ \ \forall n>n_2$ ។

ដូចនោះ $u_n\equiv c\ (mod\ m),\ \forall n>n_0$, ក្នុងនោះ $c=\max\{c_1,c_2\}$ និង $n_0=\max\{n_1,n_2\}$ ។

លំហាត់ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់រួចរាល់។

៣. តាង p ជាកន្លះបរិមាត្រត្រីកោណ ABC ។ ពេលនោះតាមបំរាប់យើងបាន:

$$R=\frac{abc}{4rp};\ r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}\ \text{រី}\ 16Rr=8abc,\ 4r^2=(1-2a)(1-2b)(1-2c)$$

យើងបាន: $1+4r(r+4R)=1+(1-2a)(1-2b)(1-2c)+8abc=4(ab+bc+ca)$

វិសមភាពដែលត្រូវការស្រាយបញ្ជាក់ សមមូលនឹង: $\dfrac{1}{\sqrt{1-a}}+\dfrac{1}{\sqrt{1-b}}+\dfrac{1}{\sqrt{1-c}}\geq\sqrt{\dfrac{1}{2(ab+bc+ca)}}$

ពិនិត្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, ចំពោះ $x>0$ មាន $f''(x)=\dfrac{3}{4\sqrt{x^3}}>0,\ \forall x>0$

ទាញបាន វាជាអនុគមន៍ប៉ោងនៅលើ $(0;+\infty)$ ។

តាមវិសមភាព *Jensen* ចំពោះបីចំនួន a,b,c ដែល $a+b+c=1$ យើងមាន:

$$\frac{a}{\sqrt{1-a}}+\frac{b}{\sqrt{1-b}}+\frac{c}{\sqrt{1-c}}=af(b+c)+bf(c+a)+cf(a+b)\geq f(a(b+c)+b(c+a)+c(a+b))$$

$$=f(2(ab+bc+ca))=\sqrt{\frac{1}{2(ab+bc+ca)}}$$

សញ្ញា "$=$" កើតមានពេល $a=b=c=\dfrac{1}{3}$ (បញ្ហាត្រូវស្រាយបញ្ជាក់)។

៤. យើងមានពហុធា $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_1x+a_0$

តាង $x_i\ (i=1,2,...,n)$ ជាបណ្តាឬសរបស់ $P(x)$ ហើយ $x_i\in(0;1)$

តាមទ្រឹស្តីបទ *Bezout* គឺ: $P(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$

តាមបំរាប់: $|P(0)|=P(1)\Leftrightarrow|a_0|=(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_n)$

តាមទ្រឹស្តីបទវៀតយើងបាន: $x_1.x_2.x_3.\dots.x_n=(-1)^n a_0$

ដោយ $x_i\in(0;1)$ នោះ $0<x_1.x_2.x_3.\dots.x_n=|x_1.x_2.x_3.\dots.x_n|=|(-1)^n a_0|=|a_0|$

ទាញបាន $x_1.x_2.x_3.\dots.x_n=(1-x_1)(1-x_2).\dots.(1-x_n)$ ។

ឧបមាថា: $x_1.x_2.x_3.\dots.x_n>\frac{1}{2^n}$ ។

អនុវត្តន៍វិសមភាព $AM-GM$ យើងបាន:

$$x_1+x_2+\dots+x_n\ge n\sqrt[n]{x_1.x_2.\dots.x_n}>\frac{n}{2}.$$

និង $$(1-x_1)+(1-x_2)+\dots+(1-x_n)\ge n\sqrt[n]{(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_n)}=n\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}>\frac{n}{2}$$

រឺ: $n-(x_1+x_2+\dots+x_n)>\frac{n}{2}\Leftrightarrow x_1+x_2+\dots+x_n<\frac{n}{2}$: ផ្ទុយពីការឧបមា, នាំឲ្យ $x_1.x_2.x_3.\dots.x_n\le\frac{1}{2^n}$

សញ្ញាសមភាពកើតមានពេល $x_1=x_2=x_3=\dots=x_n=\frac{1}{2}$ និង $P(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^n$

៥. ឧបមាថា a និង b ជាពីរចំនួនគត់វិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ តួចែករួមធំបំផុត $(2a+1,2b-1)=1$ និង $a+b$ ជាតួចែករបស់ $4ab+1$ ។

ពេលនោះ : មាន k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដើម្បីឲ្យ $4ab+1=k(a+b)$ (1)

យើងមាន: $(2a+1)(2b+1)=4ab+2(a+b)+1$ ហើយតាម (1) ទៀតទាញបាន:

$$(2a+1)(2b+1)=(k+2)(a+b) \qquad (2).$$

ពេលនោះ $a+b$ បឋមរវាងគ្នានឹង $2a+1$ ។

ពិតជាដូចនេះ, បើតាង d ជាតួចែកធំបំផុតរបស់ $a+b$ និង $2a+1$ ។

ទាញបាន d ត្រូវតែជាតួចែករបស់ $2(a+b)-(2a+1)=2b-1$ ។

ដូចនេះ $d=1$ ។ តាម (2), តាម *Lemma* របស់ *Eclid*, $a+b$ ជាតួចែករបស់ $2b+1$ នោះមាន $m\in\mathbb{Z}^+$

ដើម្បីឲ្យ: $2b+1=m(a+b)$ (4)

$$m.a+(m-2)b=1 \qquad (5)$$

បើ $m\ge2$ នោះអង្គខាងឆ្វេងរបស់ (5) ធំជាង 1 ។ ពេលនោះ $m=1$ យើងបាន $a=b+1$

យើងបានស្រាយបញ្ជាក់, បើពីរចំនួនគត់វិជ្ជមាន a និង b ផ្ទៀងផ្ទាត់ប្រធាន នោះវាមានរាង $a=b+1$ ។

ច្រាសមកវិញ, យើងស្រាយបញ្ជាក់ថា គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a និង b ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a=b+1$ នោះ $2a+1$ និង $2b-1$ បឋមរវាងគ្នា ហើយ $a+b$ ជាតួចែករបស់ $4ab+1$ ។

ពិតជាដូចនេះ, $4ab+1=4(b+1)b+1=(2b+1)^2=(a+b)^2$ នោះ $a+b$ ជាតួចែករបស់ $4ab+1$ ។

ម្យ៉ាងទៀត: $2a+1=2(a+b)+1=2b+3$

តាង D ជាតួចែករួមធំបំផុត $(2a+1,2b-1)=$ តួចែករួមធំបំផុត $(2b+3,2b-1)$ នោះ D ជាចំនួនសេស។

ជាងនេះទៅទៀត ឃើញថា D ជាតួចែករបស់ $(2b+3)-(2b-1)=4$
ដូចនោះ $D=1$, រឺ $2a+1$ និង $2b-1$ បឋមរវាងគ្នា។
ដូចនេះ គូចំនួនដែលត្រូវរកមានរាង $(a,b)=(b+1,b)$ ចំពោះ b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានណាក៏បាន។

៦. ជនជាតិបារាំងម្នាក់ៗ ស្គាល់គ្នានឹងយ៉ាងតិច $70-14=56$ ជនជាតិអាល្លឺម៉ង់។ ទាញបានចំនួនគូ (បារាំង, អាល្លឺម៉ង់) ដែលស្គាល់គ្នាមានយ៉ាងតិច $15\times 56=840$ ។
តាង n ជាចំនួនជនជាតិអាល្លឺម៉ង់ ដែលស្គាល់គ្នា ≤ 9 ជនជាតិបារាំង (តាងដោយ D_1) នោះយើងបាន:

$$840\le (85-n).10+n.9\,.$$

ទាញបាន $n\le 10$ ។ បណ្ដាជនជាតិអាល្លឺម៉ង់ដែលនៅសល់ (D_2) សុទ្ធតែស្គាល់គ្នានឹង 10 ជនជាតិបារាំង, ដូចនោះ មិនអាចស្គាល់គ្នានឹងជនជាតិអាល្លឺម៉ង់ណាទៀតទេ។
ដោយមាន 21 បន្ទប់ ហើយមានតែជនជាតិបារាំង 15 នាក់នោះមានយ៉ាងតិច 6 បន្ទប់ដែលមានសុទ្ធតែជនជាតិអាល្លឺម៉ង់។ ដោយមានច្រើនបំផុត ជនជាតិអាល្លឺម៉ង់តែ 10 នាក់ អាចស្គាល់គ្នានោះតាមទ្រឹស្ដីបទ *Dirichlet*, ក្នុង 6 បន្ទប់នេះ នឹងមានយ៉ាងតិច បន្ទប់មួយដែលមានជនជាតិអាល្លឺម៉ង់ម្នាក់គត់ ដែលស្ថិតនៅក្នុង (D_1), បន្ទប់នេះ គឺជាបន្ទប់ដែលត្រូវរក។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

វិញ្ញាសាស្នើទី១២

១. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ: $\begin{cases}\log_2\dfrac{3}{x}-\dfrac{6x-9}{x^2}=\log_2\left(y^3-2\right)+y^6=6y^3+8\\ x^3\left(2+3y\right)=1\end{cases}$

២. គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (x_n) កំណត់ដោយ: $\ln\left(1+x_n^2\right)+x_n.n=1,\ \forall n\ge 1$ ។ រក $\lim\dfrac{n(1-x_n.n)}{x_n}$ ។

៣. គេឲ្យត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណស្រួច ចារឹកក្នុងរង្វង់ (O,R) ហើយ H ជាអរតូសង់របស់ត្រីកោណ ABC ។ រង្វង់ (E,R_1) ប៉ះនឹងបណ្ដាអង្កត់ HB,HC ហើយប៉ះក្នុងនឹងរង្វង់ (O,R) ។
ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំនុចកណ្ដាលរបស់អង្កត់ HE ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ HBC ។

៤ រកអនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់: $f\left(\left(x-y\right)^2\right)=x^2-2yf(x)+\left(f\left(y\right)\right)^2,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ ។

៥. ចំនួនគត់ n ត្រូវបានហៅថា មិនមែនជាចំនួនការេប្រាដកដាច់ខាតបើ $n>1$ ហើយ n មិនមានតួចែកជាចំនួនការេប្រាកដណាផ្សេងពី 1 ។
ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ n ជាចំនួនពហុគុណមួយ ហើយ $\varphi(n)|(n-1)$ នោះ n មិនមែនជាចំនួនការេប្រាកដដាច់ខាត ហើយ n មានយ៉ាងតិចតួចែក 3 ជាចំនួនបឋម។ ចំពោះ φ ជាអនុគមន៍ *Euler* :មានតំលៃត្រង់ $n\,(n\in\mathbb{N}^*)$ ស្មើនឹងចំនួន បណ្ដាចំនួនគត់វិជ្ជមានមិនលើសពី n ហើយបឋមរវាងគ្នានឹង n ។

៦. គេឲ្យសំនុំ $A=\{1,2,3,...,2012\}$ ។ ចូរឲ្យដឹងថា តើមានចំនួនប៉ុន្មាន នៅក្នុងសំនុំ A ដែលចែកមិនដាច់នឹង $2,3,5,7$ ។

ចំលើយ

១. + $\begin{cases}\log_2\dfrac{3}{x}-\dfrac{6x-9}{x^2}=\log_2\left(y^3-2\right)+y^6-6y^3+8 & (1)\\ x^3\left(2+3y\right)=1 & (2)\end{cases}$

+ លក្ខខណ្ឌ: $x>0$ និង $y>\sqrt[3]{2}$

+ $(1) \Leftrightarrow \log_2 \frac{3}{x}-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}=\log_2\left(y^3-2\right)+y^6-6y^3+8$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{3}{x}-2.\frac{3}{x}+\left(\frac{3}{x}\right)^2=\log_2\left(y^3-2\right)-2\left(y^3-2\right)+\left(y^3-2\right)^2 \quad (3)$$

+ ពិនិត្យអនុគមន៍ $f(t)=\log_2 t-2t+t^2, t>0$

$$f'(t)=\frac{1}{t\ln 2}-2+2t\geq 2\sqrt{\frac{2t}{t\ln 2}}-2=2\left(\sqrt{\frac{2}{\ln 2}}-1\right)>0 \ (Cauchy)$$

ទាញបាន: $f(t)$ ជាអនុគមន៍កើននៅលើ $(0;+\infty)$ ។

+ យើងបាន: $(3)\Leftrightarrow f\left(\frac{3}{x}\right)=f\left(y^3-2\right)\Leftrightarrow \frac{3}{x}=y^3-2$

+ ជំនួស $x=\frac{3}{y^3-2}$ ចូល (2), យើងបាន: $\frac{27}{\left(y^3-2\right)^2}(2+3y)=1 \Leftrightarrow \frac{27(2+3y)}{\left(y^3-2\right)^2}-1=0 \quad (*)$

+ ពិនិត្យអនុគមន៍ $g(y)=\frac{27(2+3y)}{\left(y^3-2\right)^3}-1$ នៅលើ $\left(\sqrt[3]{2};+\infty\right)$

$$g'(y)=\frac{-162(y+1)\left(4y^2-y+1\right)}{\left(y^3-2\right)^4}$$

+ តារាងអថេរភាព:

y	$-\infty$	$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
$g'(y)$			$-$	
$g(y)$		$+\infty$	$\searrow$	-1

តាមតារាងអថេរភាព, ទាញបានសមីការ $(*): g(y)=0$ មានឫសតែមួយគត់នៅលើ $\left(\sqrt[3]{2};+\infty\right)$ ។

ដោយ $g(2)=0, 2\in\left(\sqrt[3]{2};+\infty\right)$ នោះ $y=2$ ជាឫសរបស់សមីការ $(*)$ ។

ទាញបាន $x=\frac{1}{2}$ ។

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានចំលើយ $\left(\frac{1}{2};2\right)$ ។

២. + ពិនិត្យ $f_n(x)=\ln\left(1+x^2\right)+nx-1$, យើងបាន:

$$f_n'(x)=\frac{2x}{1+x^2}+n=\frac{1+x^2+2x}{1+x^2}+n-1=\frac{(1+x)^2}{1+x^2}+n-1$$

+ ដោយ $n-1\geq 0$ និង $(1+x)^2\geq 0$ នោះ $f_n'(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}n=1\\x=-1\end{cases}$

ទាញបាន: $f_n'(x)>0$, $\forall x,n$ (សញ្ញា "=" កើតមានត្រង់ចំនុចដែលអាចកំនត់ចំនួនបាន)

ដូចនោះ, $f_n(x)$ កើនដាច់ខាត។

ទាញបាន, សមីការ $f_n(x)=0$ មានឫសតែមួយគត់គឺ x_n ។

+ យើងក៏មាន: $f_n(0)=-1,\ f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)>0$

ទាញបាន, សមីការ $f_n(x)=0$ មានឫសតែមួយគត់ $x_n\in\left(0;\frac{1}{n}\right)$

$\Rightarrow\ \lim x_n=0$ (អនុវត្តន៍ទ្រឹស្តីបទលីមីតអម)

$\Rightarrow\ \frac{n\left(1-x_n,n\right)}{x_n}>0$ (ព្រោះ $x_n\in\left(0;\frac{1}{n}\right)$)

+ តាមបំរាប់, យើងមាន: $1-nx_n=\ln\left(1+x_n^2\right)$ (*)

$I=\lim\frac{n(1-n.x_n)}{x_n}=\lim\frac{n}{x_n}.\ln\left(1+x_n^2\right)$ (តាម (*))

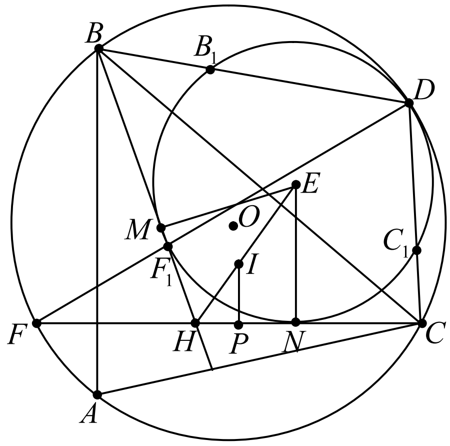
$=\lim n.x_n\ln\left(1+x_n^2\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim nx_n.\ln e$ (ព្រោះ $\lim\left(1+x_n^2\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=e$)

$=\lim nx_n=\lim\left[1-\ln\left(1+x_n^2\right)\right]=1-\ln\left(1+0\right)=1$

ដូចនេះ $I=1$ ។

៣. + រង្វង់ (E) ប៉ះអង្កត់ HB, HC ត្រង់ M, N ហើយប៉ះក្នុងរង្វង់ (O) ត្រង់ D ។

តាង I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ HBC ។



យើងស្រាយបញ្ជាក់ថា I ជាចំនុចកណ្តាល HE ។

+ I ឃ្លាតស្មើចំងាយពី HB និង HC ។

$\Rightarrow I$ ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ពុះមុំ $\widehat{BHC}$

+ E ឃ្លាតស្មើចំងាយពី HB និង HC

$\Rightarrow E$ ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ពុះមុំ $\widehat{BHC}$

ទាញបាន H,I,E ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ។

+ សង់ $IP\perp HC, P\in HC$ ។ យើងបាន I ជាចំនុចកណ្តាល $HE\Leftrightarrow HN=2HP$ ។

CH កាត់រង្វង់ (O) ត្រង់ F នោះ F ឆ្លុះគ្នានឹង H ធៀប AB ហើយ $BF=BH$ ។

+ តាង $BC=a, BF=c, FC=b, HN=HM=x$ ។

យើងបាន: $HN=2HP\Leftrightarrow x=HN=HB+HC-BC=c+b-FH-a$ (*)

ទ្រឹស្តីបទ *Ptoleme* ក្នុងចតុកោណ $BDCF$ យើងមាន $BD.FC+BF.CD=BC.DF$ (1)

តាង B_1,C_1,F_1 រៀងគ្នាជាចំនុចប្រសព្វរបស់រង្វង់ (E) នឹង DB,DC,DF ។

តាមច្បាប់បំលែងចាំងផ្ចិត D តាមផលធៀប $\frac{R_1}{R}$ បំលែងរង្វង់ (O,R) ទៅជារង្វង់ (E,R_1) ។

ទាញបាន $\frac{DB_1}{DB}=\frac{DC_1}{DC}=\frac{DF_1}{DF}=\frac{R_1}{R}$

យើងបាន: $CN^2=CC_1.CD=(CD-C_1D)CD=\left(1-\frac{C_1D}{CD}\right)CD^2=\left(1-\frac{R_1}{R}\right)CD^2$

ដូចគ្នាដែរ: $FN^2=\left(1-\frac{R_1}{R}\right)FD^2$ និង $BM^2=\left(1-\frac{R_1}{R}\right)BD^2$

ពីនោះទាញបាន: $\frac{CD}{CN}=\frac{FD}{FN}=\frac{BD}{BM}$ (2)

តាម (1) និង (2) យើងបាន:

$$BM.FC=CN.BF=FN.BC \Leftrightarrow (c-x)b+(b-FH-x)c=a(FH+x).$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{2bc-(a+c)FH}{a+b+c}$$

ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់ (*) យើងគ្រាន់តែត្រូវការស្រាយបញ្ជាក់ថា $c+b-FH=\frac{2bc-(a+c)FH}{a+b+c}$

$$\Leftrightarrow (c+b)^2-a^2-FH(a+b+c)=2bc-(a+c)FH.$$

$$\Leftrightarrow a^2=b^2+c^2-b.FH \qquad (**).$$

ដោយ $FH=2BF.\cos\widehat{BFC}=2c.\cos\widehat{BFC}$ នោះ (**) ពិត។

៤. ឲ្យ $x=y=0 \Rightarrow f(0)=\left(f(0)\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(0)=0 \\ f(0)=1 \end{array}\right.$

$+$ បើ $f(0)=0$: ឲ្យ $y=0,\ x\in\mathbb{R}$ យើងបាន: $f(x^2)=x^2 \Rightarrow f(t)=t, \forall t\geq 0$

ឲ្យ $x=y\in\mathbb{R}$ យើងបាន $f(0)=x^2-2xf(x)+(f(x))^2 \Leftrightarrow (f(x)-x)^2=0 \Rightarrow f(x)=x$.

ផ្ទៀងផ្ទាត់ឡើងវិញ ឃើញថាពិត។

$+$ បើ $f(0)=1$: ឲ្យ $y=0, x\in\mathbb{R}$ យើងបាន: $f(x^2)=x^2+1 \Rightarrow f(t)=t+1, \forall t\geq 0$

ឲ្យ $x=0, y\in\mathbb{R}$ យើងបាន: $f(y^2)=-2y+(f(y))^2$

$\Rightarrow (f(y))^2=f(y^2)+2y=y^2+2y+1=(y+1)^2 \Rightarrow f(y)=y+1$ រឺ $f(y)=-y-1$ ។

ឧបមាថាមាន $y_0\in\mathbb{R}$ យ៉ាងណាឲ្យ $f(y_0)=-y_0-1$ ។

យក $x=y=y_0$ យើងបាន:

$$1=y_0^2-2y_0f(y_0)+(f(y_0))^2 \Leftrightarrow f(y_0)=y_0+1 \text{ រឺ } f(y_0)=y_0-1$$

បើ $f(y_0)=y_0-1 \Rightarrow -y_0-1=y_0-1 \Rightarrow y_0=0$ ហើយ $f(0)=-1$ (ចោល)

បើ $f(y_0)=y_0+1 \Rightarrow -y_0-1=y_0+1 \Rightarrow y_0=-1 \Rightarrow f(-1)=0$

(ផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(y_0)=y_0+1$) ។

ដូចនេះ $f(y)=y+1, \forall y\in\mathbb{R}$ ។

៥. លំហាត់នេះ ត្រូវបានដកធ្វើជាវិញ្ញាសាប្រលង, សូមមើលចំលើយនៅវិញ្ញាសាប្រលង។

៦. $+$ តាង $A_1=\{k\in A \mid k$ ចែកដាច់នឹង $2\}$, $A_2=\{k\in A \mid k$ ចែកដាច់នឹង $3\}$, $A_3=\{k\in A \mid k$ ចែកដាច់នឹង $5\}$, $A_4=\{k\in A \mid k$ ចែកដាច់នឹង $7\}$ ។

$+$ ដំបូង, យើងត្រូវរាប់នៅក្នុងសំនុំ A ថាតើមានចំនួនប៉ុន្មានដែលចែកដាច់នឹង ចំនួនមួយយ៉ាងតិចក្នុងចំនោម $2,3,5,7$ ។

គឺថា គណនា $|A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4|$, ប្រើប្រាស់រូបមន្ត:

$$|A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4|=\sum_{i=1}^{4}|A-i|-\sum_{1\leq i<k\leq 4}|A_i\cap A_k|+\sum_{1\leq i<j<k\leq 4}|A_i\cap A_j\cap A_k|-|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|$$

$+$ យើងមាន: $|A_1|=\frac{2012}{2}=2006, |A_2|=\left[\frac{2012}{3}\right]=670, |A_3|=\left[\frac{2012}{5}\right]=402, |A_4|=\left[\frac{2012}{7}\right]=287$

$|A_1\cap A_2|=\left[\frac{2012}{6}\right]=335, |A_1\cap A_3|=\left[\frac{2012}{10}\right]=201, |A_1\cap A_4|=\left[\frac{2012}{14}\right]=143,$

$|A_2\cap A_3|=\left[\frac{2012}{10}\right]=134, |A_2\cap A_4|=\left[\frac{2012}{21}\right]=95, |A_3\cap A_4|=\left[\frac{2012}{35}\right]=57,$

$|A_1\cap A_2\cap A_3|=\left[\frac{2012}{30}\right]=67, |A_1\cap A_2\cap A_4|=\left[\frac{2012}{42}\right]=47,$

$|A_1\cap A_3\cap A_4|=\left[\frac{2012}{70}\right]=28, |A_2\cap A_3\cap A_4|=\left[\frac{2012}{105}\right]=19$

$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|=\left[\frac{2012}{210}\right]=9$

ទាញបាន $|A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4|=2365-965+161-9=1552$

ដូចនេះ, ក្នុងសំនុំ A មាន $2012-1552=460$ ចំនួនចែកមិនដាច់នឹង $2,3,5,7$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

វិញ្ញាសាស្នើទី១៣

១. រកឬសជាចំនួនពិតរបស់សមីការ: $3^{x^3+x+2}+\left(x^3-3x+1\right).3^{2x-x^3}=3^{4x+1}$ ។

២. គេឲ្យស្វ៊ីត (x_k) ដែល $x_k=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+...+\frac{k}{(k+1)!}$ ចំពោះ $k\in\mathbb{N}^*$ ។

រក $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_1^n+x_2^n+...+x_{2012}^n}$ ។

៣. គេឲ្យឆកោណប៉ោង $ABCDEF$ មាន $AB=BC, CD=DE, EF=FA$ ។រកតំលៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម:

$$T=\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}$$ ។

៤. គេឲ្យពហុធា $P(x)=a_{2013}x^{2013}+a_{2012}x^{2012}+...+a_1x+a_0$ ជាពហុធាមានមេគុណជាចំនួនគត់។ ដោយដឹងថាសមីការ $|P(x)|=1$ មាន 2013 ឬសជាចំនួនគត់។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $P(x)$ ជាពហុធាមិនអាចបំបែកបានជាផលគុណនៃពហុធាពីរឺច្រើន នៅលើ $\mathbb{Z}[x]$ ។

៥. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនបឋម p, មានចំនួនច្រើនរាប់មិនអស់ដែលមានរាង: 7^n-n $(n\in\mathbb{N})$ ចែកដាច់នឹង p ។

៦. នៅលើក្រដាសការេមានជ្រុងស្មើ 2012 មានស្នាមទឹកខ្មៅមួយដែលមានផ្ទៃធំជាង 1។ តើអាចមានចំនុចពីរ A និង B នៅក្នុងស្នាមទឹកខ្មៅរឺទេ ដែលប្រវែង AB មានរាង $\sqrt{m^2+n^2}$ ចំពោះ m និង n ជាបណ្តាចំនួនគត់?

ចំលើយ

១. យើងមាន: $3^{x^3+x+2}+\left(x^3-3x+1\right).3^{2x-x^3}=3^{4x+1}$ (1)

$$\Leftrightarrow 3^{x^3+x+2}.3^{x^3-2x}+\left(x^3-3x+1\right).3^{2x-x^3}.3^{x^3-2x}=3^{4x+1}.3^{x^3-2x}$$

$$\Leftrightarrow 3^{2x^3-x+2}+\left(x^3-3x+1\right)=3^{x^3+2x+1}$$

$\Leftrightarrow 3^{2x^3-x+2}=\left(2x^3-x+2\right)=3^{x^3+2x+1}+\left(x^3+2x+1\right)$

តាង $f(x)=3^x+x$ ។ យើងបាន $f(x)$ កើននៅលើ $\mathbb{R}$ ។

ពេលនោះ $(1)\Leftrightarrow 2x^3-x+2=x^3+2x+1\Leftrightarrow x^3-3x+1=0 \quad (2)$

តាង $g(x)=x^3-3x+1$ ។ យើងបាន $g(x)$ ជាប់នៅលើ $\mathbb{R}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត: $g(-2).g(-1)<0; g(-1).g(1)<0; g(1).g(2)<0$ ។

ទាញបាន នៅលើចន្លោះ $(-2;-1); (-1;1); (1;2)$ នីមួយៗ, សមីការ (2) មានឫសតែមួយគត់។

តាង $x=2\cos a, a\in(0;\pi)$ ។

សមីការ (2) ក្លាយទៅជា: $8\cos^3 a-6\cos a+1=0\Leftrightarrow \cos 3a=-\frac{1}{2}$

យើងរកបានបណ្តាឫសរបស់សមីការ (1) គឺ: $x_1=2\cos\frac{2\pi}{9}, x_2=2\cos\frac{4\pi}{9}, x_3=2\cos\frac{8\pi}{9}$ ។

២. យើងមាន: $\forall x\in\mathbb{N}^*, x_{k+1}-x_k=\frac{(k+1)}{(k+2)!}\Rightarrow x_{k+1}-x_k>0$, មានន័យថា (x_k) ជាស្វ៊ីតកើន។

ទាញបាន $0<x_1<\ldots<x_{2012}$ ។

យើងបាន: $x_{2012}^n<x_1^n+x_2^n+\ldots+x_{2012}^n<2012x_{2012}^n$

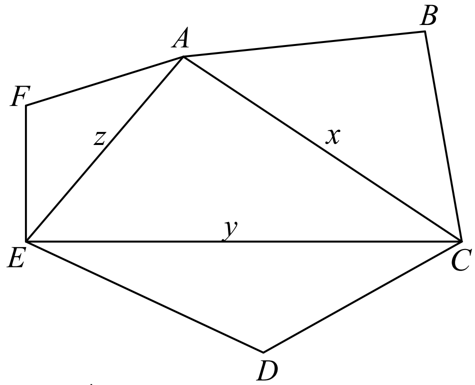
$\Leftrightarrow x_{2012}<\sqrt[n]{x_1^n+x_2^n+\ldots+x_{2012}^n}<2012^{\frac{1}{2}}x_{2012} \quad (*)$

យើងមាន: $\frac{k}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$ នាំឲ្យ $x_k=1-\frac{1}{(k+1)!}; x_{2012}=1-\frac{1}{2013!}$

យើងបាន $(*)\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2013}<\sqrt[n]{x_1^n+x_2^n+\ldots x_{2012}^n}<2012^{\frac{1}{n}}\left(1-\frac{1}{2013!}\right)$

ហើយ $\lim\limits_{n\to+\infty}2012^{\frac{1}{n}}=1$ នាំឲ្យ $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_1^n+x_2^n+\ldots+x_{2012}^n}=1-\frac{1}{2013!}$ ។

៣. តាង $AC=x, CE=y, EA=z$ ។



តាមវិសមភាព *Ptolemy* ក្នុងចតុកោណ $ACEF$, យើងបាន:

$AC.EF+CE.AF\ge AE.CF$ ។

ដោយ $EF=FA$ នាំឲ្យ $FA(x+y)\ge FC.z$ រឺ $\frac{FA}{FC}\ge\frac{z}{x+y}$

បកស្រាយដូចគ្នាដែរ, យើងបាន: $\frac{DE}{DA}\ge\frac{y}{z+x}$ និង $\frac{BC}{BE}\ge\frac{x}{z+y}$ ។

បូកបណ្តាវិសមភាពខាងលើបញ្ចូលគ្នា ហើយប្រើប្រាស់វិសមភាព *Nesbitt*, យើងបាន:

$$\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}\ge\frac{x}{z+y}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\ge\frac{3}{2}$$

សញ្ញាស្មើកើតមានលុះត្រាតែ $x=y=z$ ព្រមគ្នានឹង A,B,C,D,E,F

គឺថា $ABCDEF$ ត្រូវតែជាឆកោណនិយ័តមួយ។

ដូចនេះ តំលៃតូចបំផុតរបស់ T ស្មើ $3/2$ ពេល $ABCDEF$ ជាឆកោណនិយ័ត។

៤. ឧបមាថា $P(x)$ ជាពហុធាដែលអាចបំបែកបានជាផលគុណនៃពហុធាផ្សេងទៀត នៅលើ $\mathbb{Z}[x]$ មានន័យថា មានពហុធាពីរ $f(x)$ និង $g(x)$ មានមេគុណជាចំនួនគត់ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $P(x)=f(x).g(x)$, ក្នុងនោះ $\deg(f)\ge 1, \deg(g)\ge 1$ ។

យើងបាន $\deg(f)+\deg(g)=2013$ នាំឲ្យ $\deg(f)\le 1006$ រឺ $\deg(g)\le 1006$ ។
ឧបមាថា $\deg(f)\le 1006$ ។
តាង x_i ចំពោះ $i=\overline{1,2013}$ ជា 2013 ឬសជាចំនួនគត់របស់សមីការ $|P(x)|=1$ ។
យើងបាន $|P(x_i)|=|f(x_i)|.|g(x_i)|=1 \quad (1)$
ដោយ $f(x), g(x)$ ជាបណ្ដាពហុធាមានមេគុណជាចំនួនគត់ នោះតាម (1) យើងបាន:
$$|f(x_i)|=1, i=\overline{1,2013} \text{ ។}$$
ទាញបាន សមីការ $f(x)=1$ រឺសមីការ $f(x)=-1$ មានយ៉ាងតិច 1007 ឬសជាចំនួនគត់។
ដោយ $\deg(f)\le 1006$ នាំឲ្យ $f(x)$ ជាចំនួនថេរ។
ករណីនេះ មិនសមហេតុផល ព្រោះ $\deg(f)\ge 1$ ។
ដូចនេះ $P(x)$ មិនអាចបំបែកបានជាផលគុណនៃពហុធាពីរ រឺច្រើននៅលើ $\mathbb{Z}[x]$ ។

៥. + បើ $p=7$ នោះបណ្ដាចំនួនមានរាង 7^n-n ចំពោះ $7k, k\in\mathbb{N}, k\ge 1$ សុទ្ធតែចែកដាច់នឹង 7 ។
+ បើ $p\ne 7$ នោះ $(7,p)=1$ ។ តាមទ្រឹស្ដីបទ *Fermat* , យើងបាន $7^{p-1}\equiv 1\,(\text{mod } p)$
ទាញបាន $7^{m(p-1)}\equiv 1\,(\text{mod } p), m\in\mathbb{N}$
យក m ផ្ទៀងផ្ទាត់ $m\equiv -1\,(\text{mod } p)$ ។ យើងបាន $7^{m(p-1)}+m\equiv 0\,(\text{mod } p)$
ទាញបាន $7^{m(p-1)}-m(p-1)\equiv 0\,(\text{mod } p)$
ដូចនោះ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n=m(p-1)$ ដែល $m\equiv -1\,(\text{mod } p), m\in\mathbb{N}$ រឺ $m=kp-1, k\in\mathbb{N}^*$ (មានចំនួនគត់ធម្មជាតិដូចនេះច្រើនរាប់មិនអស់) យើងបាន $(7^n-n)\,\vdots\, p$ ។

៦. យើងគូសក្រដាសទៅជាបណ្ដាការេឯកតា (វិមាត្រជ្រុងស្មើ 1) រួចកាត់បណ្ដាប្រលោះការេឯកតាដែលមានស្នាមទឹកខ្មៅចេញ។ យើងផ្លាស់ទីបណ្ដាប្រលោះការេតាមទិសដៅជ្រុងរបស់ពួកវា ហើយត្រួតត្រួតពីលើគ្នា។
ដូចនេះ នៅលើរូបការេឯកតា មានស្នាមទឹកខ្មៅមួយចំនួនដែលមានក្រលាផ្ទៃធំជាង 1 នោះមានយ៉ាងតិចស្នាមទឹកខ្មៅពីរ ដែលមានចំនុចរួមណាមួយ។
ឧបមាថា យើងត្រូវផ្លាស់ទីរូបការេទីពីរ m ប្រលោះតាមទិសដៅឈរ និង n ប្រលោះតាមទិសដៅដេកដើម្បីទៅត្រួតគ្នានឹងរូបការេទីមួយ ដែលមានស្នាមទឹកខ្មៅមានចំនុចរួម ជាមួយនឹងស្នាមទឹកខ្មៅនៅក្នុងរូបការេទីពីរ, នោះប្រវែងរវាងពីរចំនុចដែលត្រូវគ្នា ក្រោយពេលធ្វើការផ្លាស់ទីនេះស្មើនឹង $\sqrt{m^2+n^2}$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

វិញ្ញាសាស្នើទី១៤

១. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម: $\begin{cases} x+y+1+x\sqrt{x^2+2}+(y+1)\sqrt{y^2+2y+3}=0 \\ 30^{x-y}+4^{x-y+1}=41(x-y)+5 \end{cases}$

២. គេឲ្យស្វ៊ីត (u_n) ត្រូវបានកំណត់ដោយ: $u_1=\dfrac{1}{2}, u_{n+1}=\dfrac{u_n}{2+\sqrt{2u_n^2+3}} (n\in\mathbb{N}^*)$ ។
គណនា $\lim u_n$ ។

៣. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើចតុកោណមួយមានជ្រុងបីមិនធំជាង 1, នោះក្រលាផ្ទៃរបស់វាមិនលើសពី $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ ។

៤. រកគ្រប់បណ្តាពហុធា មានមេគុណជាចំនួនពិត $P(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម:

$$P\left(P(x)+y^2\right)=P^2(x)-P(x)P(y)+xy+x.$$

៥. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម នៅលើសំនុំចំនួនគត់: $x_1^4+x_2^4+x_3^4+...+x_{11}^4=2012$ ។

៦. គេឲ្យសំនុំ M មាន 2005 ចំនួនវិជ្ជមាន: $a_1,a_2,...,a_{2005}$ ។ ពិនិត្យគ្រប់បណ្តាសំនុំរង T_i ខុសពីសំនុំទទេ របស់សំនុំ M, តាង s_i ជាផលបូកបណ្តាចំនួន ស្ថិតនៅក្នុងសំនុំរង T_i មួយខាងលើ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា គេអាចចែកសំនុំនៃគ្រប់បណ្តាចំនួន s_i ត្រូវបានបង្កើតដូចនេះ ទៅជា 2005 សំនុំរងខុសពីសំនុំទទេ មិនប្រសព្វគ្នា យ៉ាងណាឲ្យ ផលធៀបរវាងពីរចំនួនណាក៏ដោយ ស្ថិតនៅក្នុងសំនុំរងតែមួយ ដែលទើបបែងចែក គឺមិនលើសពី 2 ។

ចំលើយ

១. តាង: $\begin{cases} x+y+1+x\sqrt{x^2+2}+(y+1)\sqrt{y^2+2y+3}=0 & (1)\\ 30^{x-y}+4^{x-y+1}=41(x-y)+5 & (2)\end{cases}$

តាង $a=x-y$ សមីការ (2) ក្លាយទៅជា $30^a+4^{a+1}-41a-5=0$

ពិនិត្យ $f(a)=30^a+4^{a+1}-41a-5$ នៅលើ $\mathbb{R}$ មាន $f'(a)=30^a\ln 30+4^{a+1}\ln 4-41$

និង $f''(a)=30^a\ln^2 30+4^{a+1}\ln^2 4>0\ \forall a$

ទាញបាន $f'(a)$ ជាអនុគមន៍កើន, ដូចនេះ: $f'(a)$ មានឬសមិនលើសពីមួយ។

ពេលនោះ: $f(a)$ មានបរមាមិនលើសពីមិនលើសពីមួយ $f(a)$ មានឬសមិនលើសពីពីរ (3)

ដោយ $f(0)=f(1)=0\quad(4)$

តាម $(3)\,\&\,(4)$ ទាញបានសមីការ $(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-y=0\\ x-y=1\end{array}\right.$

$*$ ចំពោះ: $x-y=1\Leftrightarrow y+1=x\quad(1)\Leftrightarrow 2x\left(1+\sqrt{x^2+2}\right)=0\Leftrightarrow x=0$

ទាញបាន $(x;y)=(0;-1)$ ជាចំលើយរបស់ប្រព័ន្ធដែលឲ្យ។

$*$ ចំពោះ: $x-y=0\Leftrightarrow x=y$

$$(1)\Leftrightarrow x\left(1+\sqrt{x^2+2}\right)+(y+1)\left(1+\sqrt{(y+1)^2+2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(1+\sqrt{x^2+2}\right)+(x+1)\left(1+\sqrt{(x+1)^2+2}\right)=0$$

តាង: $\begin{cases}u=\sqrt{x^2+2}, u>0\\ v=\sqrt{x^2+2x+3}, v>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u^2=x^2+2\\ v^2=x^2+2x+3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v^2-u^2=2x+1\\ x^2=\dfrac{v^2-u^2-1}{2}\end{cases}$

សមីការ (1) ក្លាយទៅជា $(v-u)\left[(v+u)\left(1+\dfrac{v+u}{2}\right)+\dfrac{1}{2}\right]=0\Leftrightarrow v-u=0$

ដោយ $u>0, v>0$, ពេលនោះ: យើងបានសមីការ:

$$(1)\Leftrightarrow\sqrt{x^2+2x+3}=\sqrt{x^2+2}\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$$

ទាញបាន ចំលើយរបស់ប្រព័ន្ធគឺ $(x;y)=\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$

ចំណាំ: ករណី (2) សិស្សអាចប្រើប្រាស់វិធីសាស្រ្តវាយតំលៃ។

២. យើងមាន: $u_1 = 3; u_2 = \dfrac{3}{2+\sqrt{21}}$ ។ តាមវិចារអនុមានរួម $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ និង (u_n) កើន។

បំលែងទៅជា $\dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{2}{u_n} + \sqrt{2+\dfrac{3}{u_n^2}}$

តាង $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ ចំពោះ: $v_1 = \dfrac{1}{3}, v_2 = \dfrac{2+\sqrt{21}}{3}$

យើងបាន $v_{n+1} = 2v_n + \sqrt{2+3v_n^2} \Rightarrow v_{n+1}^2 - 4v_n v_{n+1} + v_n^2 = 2 \qquad (*)$

ពីនោះទាញបាន $v_{n+2}^2 - 4v_{n+1}v_{n+2} + v_{n+1}^2 = 2 \qquad (**)$

ដក $(**)$ នឹង $(*)$,អង្គនឹងអង្គ: $(v_{n+2} - v_n)(v_{n+2} - 4v_{n+1} + v_n) = 0$

រឺ $v_{n+2} - 4v_{n+1} + v_n = 0$ (ព្រោះ (u_n) កើន)

សមីការសំគាល់ $x^2 - 4x + 1 = 0$ មានឫសពីរគឺ $x_1 = 2-\sqrt{3}; x_2 = 2+\sqrt{3}$ ។

តួទូទៅមានរាង $v_n = A.x_1^n + B.x_2^n$

ដោយ $\begin{cases} v_1 = \dfrac{1}{3} \\ v_2 = \dfrac{2+\sqrt{21}}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{\sqrt{7}-1}{6(\sqrt{3}-2)} \\ B = \dfrac{\sqrt{7}+1}{6(\sqrt{3}+2)} \end{cases}$

ទាញបាន $v_n = \dfrac{\sqrt{7}-1}{6(\sqrt{3}-2)}.(2-\sqrt{3})^n + \dfrac{\sqrt{7}+1}{6(\sqrt{3}+2)}.(2+\sqrt{3})^n$

រឺ $u_n = \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{7}-1}{6(\sqrt{3}-2)}.(2-\sqrt{3})^n + \dfrac{\sqrt{7}+1}{6(\sqrt{3}+2)}.(2+\sqrt{3})^n} \; (n \in \mathbb{N}^*)$

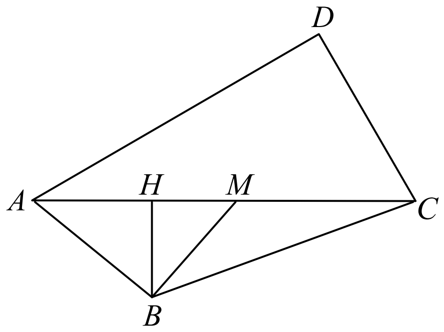
ដោយ $\lim(2-\sqrt{3})^n = 0$ និង $\lim(2+\sqrt{3})^n = +\infty$ នោះ: $\lim u_n = 0$ ។

៣. ឧបមាថា AD ជាជ្រុងតែមួយគត់របស់ចតុកោណដែលធំជាង 1។

តាង $AC = a$, និងតាង M ជាចំនុចកណ្តាលរបស់ជ្រុង AC ។

តាមទំនាក់ទំនងមាត្រក្នុង ΔABC, យើងបាន $BA^2 + BC^2 = 2BM^2 + \dfrac{a^2}{2} \le 2$

$\Leftrightarrow BM^2 \le \dfrac{4-a^2}{4} \quad (1)$



$\Leftrightarrow S_{ABC} = \dfrac{a}{2}.BH$

តាម (1) ទាញបាន $BH \le BM \le \dfrac{1}{2}\sqrt{4-a^2}$

ដូចនេះ: $S_{ABC} \le \dfrac{a}{2}.\dfrac{1}{2}\sqrt{4-a^2} = \dfrac{a}{4}.\sqrt{4-a^2} \quad (2)$

យើងបាន $S_{ACD} = \dfrac{1}{2}.AC.CD.\sin\widehat{ACD} \le \dfrac{1}{2}AC.CD \le \dfrac{a}{2}$

$\Rightarrow S_{ABCD} \le \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{4}\sqrt{4-a^2} \quad (3)$

យើងបាន $\frac{a}{2}+\frac{a}{4}\sqrt{4-a^2}=\frac{2a+a\sqrt{4-a^2}}{4}=\frac{a}{4}\left(1+1+\sqrt{4-a^2}\right)$ (4)

តាមវិសមភាព *Bunyakovski* ,យើងបាន:

$$\left(1+1+\sqrt{4-a^2}\right)^2\le 3\left(1+1+4-a^2\right)\Leftrightarrow 2+\sqrt{4-a^2}\le\sqrt{3}.\sqrt{6-a^2}$$

តាម $(3)\,\&\,(5)$ ទាញបាន $S_{ABCD}\le\frac{\sqrt{3}}{4}a\sqrt{6-a^2}$

តាមវិសមភាព *Cauchy* នាំឲ្យ $a\sqrt{6-a^2}\le\frac{a^2+(6-a^2)}{2}=3$

ជំនួស (7) ចូល (3) យើងបាន $S_{ABCD}\le\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (8) (បញ្ហាត្រូវស្រាយបញ្ជាក់)

សញ្ញាសមភាពក្នុង (8) កើតមានលុះត្រាតែ សញ្ញាសមភាពក្នុង (1) កើតមាន, $H\equiv M,\sin\widehat{ACD}=1$, $CD=1$, មានសញ្ញាស្មើក្នុង (5), មានសញ្ញាស្មើក្នុង (7) ។

សញ្ញាសមភាព $(1)\Leftrightarrow BA=BC=1;\sin\{ACD\}=1\Leftrightarrow AC\perp CD$

សញ្ញាសមភាព (5),(6) កើតមាន $\Leftrightarrow a=\sqrt{3}$

សរុបមក សញ្ញាសមភាពក្នុង (8) កើតមាន $\Leftrightarrow AD=2, AB=BC=CD=1, \widehat{ACD}=90^0$ ។

៤. តាម (1) ជំនួស y ដោយ $-y$ យើងបាន:

$P\left(P(x)+(-y)^2\right)=P^2(x)-P(x)P(-y)+x(-y)+x\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}$ (2)

បូករួមនឹង (1) ជាមួយ (2) ,ទាញបាន $2xy=P(x)(P(y)-P(-y)),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ (3)

ជំនួស $x=y-1$ ចូល (1) , យើងបាន $P\left(P(-1)+(-1)^2\right)=P^2(-1)-P(-1)P(-1)+1-1=0$ (4)

បន្តជំនួស $x=P(-1)+1$ ចូល (3) , យើងទទួលបាន:

$$2\left(P(-1)+1\right)y=P\left(P(-1)+1\right)\left(P(y)-P(-y)\right)=0\ \ \forall y\in\mathbb{R}$$

ទាញបាន $P(-1)=-1$

បន្តឲ្យ $x=-1,y=0$ ចូល (1) , យើងបាន $P(0)=P(-1)=-1$ (5)

បន្តឲ្យ, $x=0,y=-1$ ចូល (1) , យើងបាន $P(0)=1+P(-1)=0$ (6)

តាម (5) & (6) យើងឃើញថាមានភាពផ្ទុយគ្នា, ទាញបាន មិនមានអនុគមន៍ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ (1) ទេ។

៥. បើ $x=2k$ នោះ $x^4=16k^4\,\vdots\,16$

បើ $x=2k+1$ នោះ $x^4-1=(x^2-1)(x^2+1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$

ដោយ $(x-1),(x+1)$ ជា 2 ចំនួនគូតគ្នានោះ ផលគុណរបស់ពួកវាចែកដាច់នឹង 8 ។

$(x^2+1)=(2k+1)^2+1=4k^2+4k+2=2(2k^2+2k+1)\,\vdots\,2$.

ទាញបាន $(x^4-1)\,\vdots\,16$

ដូចនេះ ពេលចែក $x_1^4+x_2^4+x_3^4+...+x_{11}^4$ នឹង 16 គឺបានសំនល់ស្មើនឹងចំនួន នៃបណ្តាចំនួនសេសក្នុង $x_1^4;x_2^4;x_3^4;...;x_{11}^4$, គឺថាមិនលើសពី 11។

ដោយ $2012=16.125+12\equiv 12\ (\text{mod}\ 16)$

ដូចនេះ សមីការដែលឲ្យមិនមានឫសជាចំនួនគត់។

៦. តាង $n=2005$ ។ តាងបណ្តាធាតុរបស់ M ដោយ $a_1\le a_2\le...\le a_n$ ។

តាង $S_n = a_1 + a_2 + ... a_m, S_0 = 0\ (0 \le m \le n)$ ។ តាង $P = \{s_i, T_i \subseteq M\}$

តាង $P_m = \{s \in P \mid S_{m-1} < s \le S_m\}$ ចំពោះ $m = 1, 2, ..., n$ ។

យើងស្រាយបញ្ជាក់ថា របៀបចែក P ទៅជាបណ្តាសំនុំ P_m ដូចខាងលើ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌប្រធាន។

ចង់បានដូចនេះ យើងគ្រាន់តែត្រូវការស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ $b \in P_m$ នោះ $2b > S_m$ ។

ពិតជាដូចនេះ, ដោយ $b > S_{m-1} = a_1 + a_2 + ... + a_{m-1}$ ហើយ $b = \sum_{k=1}^{h} a_{i_k}$

នោះមាន $i_k\ (k = 1, ..., h)$ ដែល $i_k \ge m$ ។

ដូចនេះ $b \ge a_{i_k} \ge a_m = S_m - S_{m-1} > S_m - b \Rightarrow 2b > S_m$ ។

លំហាត់ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់រួចរាល់។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

វិញ្ញាសាស្នើទី១៥

១. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ: $\begin{cases} y^6 + y^3 + 2x^2 = \sqrt{xy - x^2y^2} \\ 4xy^3 + y^3 + \frac{1}{2} = 2x^2 + \sqrt{1 + (2x - y)^2} \end{cases}$ (1)

២. គេឲ្យស្វីត (u_n) កំណត់ដូចខាងក្រោម: $\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = -1 \\ u_n = -u_{n-1} - 2u_{n-2}, n = 3, 4, ... \end{cases}$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $A = 2^{2012} - 7u_{2010}^2$ ជាចំនួនការេប្រាកដ។

៣. គេឲ្យត្រីកោណ ABC, នៅលើបណ្តាបន្លាយ AB, CB ទៅខាង B គេដៅ M, N យ៉ាងណាឲ្យ $AM = CN = p$ (p ជាកន្លះបរិមាត្រត្រីកោណ ABC)។ តាង I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងរបស់ត្រីកោណ ABC ហើយរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC មានអង្កត់ផ្ចិត BK ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $KI \perp MN$ ។

៤. រកគ្រប់បណ្តាអនុគមន៍ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់: $\forall m; n \in \mathbb{N}$ គេបាន: $f[f(m) + f(n)] = m + n$ ។

៥. រកគ្រប់បណ្តាប្រព័ន្ធមានបីចំនួនគត់វិជ្ជមាន (x, y, z) យ៉ាងណាឲ្យផលបូក:

$\sqrt{\frac{2012}{x+y}} + \sqrt{\frac{2012}{y+z}} + \sqrt{\frac{2012}{z+x}}$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានគូ។

៦. គេឲ្យ A ជាសំនុំមាន 200 ចំនួនគត់វិជ្ជមានផ្សេងគ្នា ហើយ 3 ចំនួនគត់វិជ្ជមានផ្សេងគ្នាណាក៏ដោយស្ថិតនៅក្នុង A ជាប្រវែងជ្រុងទាំងបីរបស់ត្រីកោណមិនទាលមួយ។ ក្នុងករណីនេះ, គេហៅថា ជាត្រីកោណកំណត់ដោយសំនុំ A ហើយតាង $S(A)$ ជាផលបូកបរិមាត្រនៃគ្រប់បណ្តាត្រីកោណផ្សេងគ្នាកំណត់ដោយសំនុំ A ។ រក $\min(S(A))$ ។ (ត្រីកោណពីរស្មើគ្នាត្រូវចាត់ទុកថាដូចគ្នា)។

ចំលើយ

១. តាមលក្ខខណ្ឌ $xy - x^2y^2 \ge \Leftrightarrow 0 \le xy \le 1$ ។

យើងបាន: $\sqrt{xy - x^2y^2} = \sqrt{xy.(1 - xy)} \le \frac{xy + (1 - xy)}{2} = \frac{1}{2}$

តាមសមីការទីមួយរបស់ប្រព័ន្ធ, ទាញបាន $y^6 + y^3 + 2x^2 \le \frac{1}{2}$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត, $\sqrt{1 + (2x - y)^2} \ge 1$, នោះតាមសមីការទីពីររបស់ប្រព័ន្ធ, យើងទាញបាន:

$4xy^3+y^3+\frac{1}{2}\ge 2x^2+1$ រឺ $2x^2-4xy^3-y^3\le -\frac{1}{2}$ (2)

តាម $(1)\&(2)$ យើងបាន $y^6-4xy^3+4x^2\le 0\Leftrightarrow \left(y^3-2x\right)^2\le 0\Leftrightarrow y^3=2x$

ជំនួស (1) ចូល (2), យើងបាន $6x^2+2x\le\frac{1}{2}$ និង $-6x^2-2x\le -\frac{1}{2}$ ។

ពីនោះ, $6x^2+2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{1}{2}\\ x=\frac{1}{6}\end{array}\right.$

ដោយ $y^3=2x$, នាំឲ្យយើងបាន: $y=-1,\ y=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

ផ្ទៀងផ្ទាត់, ប្រព័ន្ធសមីការមានចំលើយតែមួយគត់ $\left(-\frac{1}{2};-1\right)$ ។

២. តាង $v_n=2^{n+1}-7u_{n-1}$ នាំឲ្យ $A=v_{2011}=2^{2012}-7u_{2010}^2$

យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់ថា $v_n=\left(2u_n+u_{n-1}\right)^2$ ចំពោះគ្រប់ $n=2,3,\ldots$ (1)

យើងនឹងស្រាយថា (1) ពិត ដោយប្រើវិចារអនុមានរួមដូចខាងក្រោម:

ពេល $n=2$, តាមវិធីកំណត់របស់ស្វ៊ីតនាំឲ្យ $v_2=2^3-7u_1^2=8-7=1$

ម្យ៉ាងទៀត $(2u_2+u_1)^2=(-2+1)^2=1$

ដូចនោះ $v_2=(2u_2+u_1)^2$ រឺ (1) ពិតពេល $n=2$ ។

ឧបមាថា (1) ពិតពេល $n=k\ (k\ge 2)$ គឺថា $v_k=(2u_k+u_{k-1})^2$ ។

យើងត្រូវការស្រាយបញ្ជាក់ថា (1) ពិតពេល $n=k+1$, មានន័យថា ត្រូវស្រាយថា $v_{k+1}=(2u_{k+1}+u_k)^2$ ។

ពិតជាដូចនេះ តាមវិធីកំណត់របស់ស្វ៊ីតនាំឲ្យ $v_{k+1}=2^{k+2}-7u_k^2$

តាមរូបមន្តកំណត់របស់ស្វ៊ីត (u_n) នាំឲ្យ:

$$\left(2u_{k+1}+u_k\right)^2=\left[2\left(-u_k-2u_{k-1}\right)+u_k\right]^2=\left(-u_k-4u_{k-1}\right)^2=u_k^2+8u_ku_{k-1}+16u_{k-1}^2$$
$$=2\left(4u_k^2+4u_ku_{k-1}+u_{k-1}^2\right)+14u_{k-1}^2-7u_k^2=2\left(2u_k+u_{k-1}\right)^2+14u_{k-1}^2-7u_k^2$$
$$=2v_k+14u_{k-1}^2-7u_k^2=2\left(2^{k+1}-7u_{k-1}^2\right)+14u_{k-1}^2-7u_k^2=2^{k+2}-7u_k^2=v_{k+1}$$

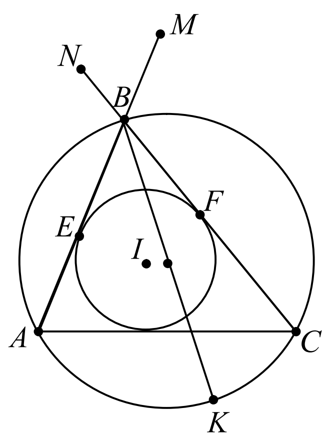
ដូចនេះ $v_{k+1}=2^{k+2}-7u_k^2$ មានន័យថា (1) ពិតចំពោះ $n=k+1$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទវិចារអនុមានរួម នាំឲ្យ (1) ពិតចំពោះគ្រប់ $n=2,3,\ldots$

តាម (1) ទាញបាន គ្រប់តួរបស់ស្វ៊ីត (v_n) សុទ្ធតែជាចំនួនការេប្រាកដ។

ដូចនេះ $A=v_{2011}=2^{2012}-7u_{2010}^2$ ជាចំនួនការេប្រាកដ។

៣. រង្វង់ (I) ប៉ះ AB,BC រៀងគ្នាត្រង់ E,F ។



បណ្តាត្រីកោណ MAK និង NCK កែងត្រង់ A,C យើងបាន:

$$KN^2-KM^2=(KC^2+CN^2)-(KA^2+AM^2)=KC^2-KA^2$$
$$=(KC^2-KB^2)+(KB^2-KA^2)=AB^2-BC^2 \qquad (1)$$

ម្យ៉ាងទៀត បណ្តាត្រីកោណ IEM និង IFN កែងត្រង់ E,F យើងបាន:

$$IN^2-IM^2=(IF^2+FN^2)-(IE^2+EM^2)=FN^2-EM^2$$

$$= (CN - CF)^2 - (BM - BE)^2 . \qquad (2)$$

ដោយ $CN - CF = p - \dfrac{AC + BC - AB}{2} = AB$

$$BM - BE = p - \dfrac{AC + AB - BC}{2} \qquad (3)$$

តាម (1), (2), (3) យើងបាន: $KN^2 - KM^2 = AB^2 - BC^2 = IN^2 - IM^2$

ទាញបាន $KI \perp MN$ ។

៤. 1. យើងស្រាយបញ្ជាក់ថា: f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់។

ពិតជាដូចនេះ :

$\forall m_1; m_2 \in \mathbb{N}$ ដោយ $f(m_1) = f(m_2)$ នាំឲ្យ $f(m_1) + f(t) = f(m_2) + f(t)$ ចំពោះគ្រប់ $t \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow f\left[f(m_1) + f(t)\right] = f\left[f(m_2) + f(t)\right]$

តាមបំរាប់ឲ្យបាន: $m_1 + t = m_2 + t$ នាំឲ្យ $m_1 = m_2$ ដូចនោះ f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់

2. $\forall m; n; t; k \in \mathbb{N}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $m + n = t + k$ នាំឲ្យ $f\left[f(m) + f(n)\right] = f\left[f(t) + f(k)\right]$

$\Rightarrow f(m) + f(n) = f(t) + f(k)$ (ព្រោះ f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់)

គ្រប់ $m; n \in \mathbb{N}$ នាំឲ្យ $(m + n - 1) + 1 = m + n$ នោះតាមខាងលើ $f(m + n - 1) + f(1) = f(m) + f(n)$

យក $m = 2$ នាំឲ្យ $f(n+1) = f(n) + \left[f(2) - f(1)\right]$, គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ (2)

តាង $f(1) = u; f(2) - f(1) = v$ នាំឲ្យតាមបំរាប់ឲ្យ $u \in \mathbb{N}; v \in \mathbb{Z}$

ជំនួសចូល (2) យើងបាន: $f(n+1) = f(n) + v$ ចំពោះគ្រប់ n

យើងស្រាយបញ្ជាក់ថា: $f(n) = v(n-1) + u$, គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ (3) ដោយវិចារអនុមានរួម។

យើងមាន: $f(2) = u + v = v(2-1) + u$ នាំឲ្យ (3) ពិតពេល $n = 2$ ។

ឧបមាថា: $f(n) = v(n-1) + u$, យើងបាន: $f(n+1) = f(n) + v = v(n-1) + u + v = v.n + u$

ដូចនេះ (3) ពិតចំពោះគ្រប់ n ។

យើងបាន: $f\left[f(m) + f(n)\right] = f\left[v(m-1) + u + v(n-1) + u\right]$

$$= f\left[v(m+n) + 2(u-v)\right] = v\left[v(m+n) + 2(u-v) - 1\right] + u$$

$$= v^2(m+n) + (2v+1)(u-v) .$$

ម្យ៉ាងទៀត, $f\left[f(m) + f(n)\right] = m + n$ នាំឲ្យយើងបាន:

$v^2(m+n) + (2v+1)(u-v) = m + n$, ចំពោះគ្រប់ $m + n$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ។

ដោយផ្ទឹមតួត្រូវគ្នានៅអង្គសងខាង យើងបាន

$v^2 = 1$ និង $(2v+1)(u-v) = 0$, ដូចនោះ $v = 1$ រឺ $v = -1$ ។

បើ $v = -1$ នាំឲ្យ $f(n) = -n + u - 1$

ពេលនោះ $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = -\infty$, ដូចនេះ ពេល n ធំល្មមគឺ $f(n) \neq \mathbb{N}$ (ផ្ទុយនឹង $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$)

ដូចនោះ $v = 1$ នាំឲ្យ $3(u-1) = 0$ រឺ $u = 1$ នាំឲ្យ $f(n) = n; \forall n \in \mathbb{N}$

ពិនិត្យអនុគមន៍ $f(n) = n;\ \forall n \in \mathbb{N}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ប្រធាន។

សន្និដ្ឋាន: មានអនុគមន៍តែមួយគត់គឺ $f(n) = n; \forall n \in \mathbb{N}$ ។

៥. ដំបូង យើងស្រាយបញ្ជាក់ *Lemma* ខាងក្រោម: បើ $p, q, r,$ ជាបណ្តាចំនួនសនិទានមិនអវិជ្ជមាន ហើយ

$\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$ ជាចំនួនសនិទានមួយ នាំឲ្យ $\sqrt{p};\sqrt{q};\sqrt{r}$ ក៏ជាបណ្តាចំនួនសនិទានដែរ។

ស្រាយបញ្ជាក់ *Lemma*: តាង $\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}=s$ ។

បើ $s=0$ នាំឲ្យ $\sqrt{p};\sqrt{q};\sqrt{r}$ ស្មើសូន្យព្រមគ្នា ហើយ *Lemma* គឺពិត។

បើ $s\neq 0$ យើងបាន $\sqrt{p}+\sqrt{q}=s-\sqrt{r}\Leftrightarrow p+q+2\sqrt{pq}=s^2+r-2s\sqrt{r}$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{pq}=s^2+r-p-q-2s\sqrt{r}\quad (1).$$

តាង $T=s^2+r-p-q\Rightarrow T>0$, លើកអង្គទាំងពីរនៃ (1) ជាការេ យើងបាន:

$$4pq=T^2+4rs^2-4Ts\sqrt{r}\Rightarrow \sqrt{r}=\frac{T^2+4rs-4pq}{4Ts}\in\mathbb{Q}$$

ស្រាយបញ្ជាក់ដូចគ្នា យើងបាន: $\sqrt{p};\sqrt{q}$ ក៏ជាបណ្តាចំនួនសនិទានដែរ

$\Rightarrow$ *Lemma* ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់។

ត្រឡប់មកលំហាត់យើងវិញ: តាមសំណើរប្រធានយើងបាន:

$\sqrt{\frac{2012}{x+y}}+\sqrt{\frac{2012}{y+z}}+\sqrt{\frac{2012}{z+x}}=2m\quad (1)$, ចំពោះ m ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានមួយ។

យើងបំលែង (1) ទៅជារាង: $\sqrt{\frac{4.503}{x+y}}+\sqrt{\frac{4.503}{y+z}}+\sqrt{\frac{4.503}{z+x}}=2m\Leftrightarrow\sqrt{\frac{503}{x+y}}+\sqrt{\frac{503}{y+z}}+\sqrt{\frac{503}{z+x}}=m$

ហើយតាម *Lemma*, នាំឲ្យ $\sqrt{\frac{503}{x+y}};\sqrt{\frac{503}{y+z}};\sqrt{\frac{503}{z+x}}$ ជាចំនួនសនិទានបី។

ឧបមាថា $\sqrt{\frac{503}{x+y}}=\frac{a}{b}$ ចំពោះ a,b ជា 2 ចំនួនគត់វិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $(a,b)=1$

$\Rightarrow 503.b^2=(x+y).a^2\Rightarrow a^2$ ជាតួចែករបស់ 503, ឃើញថា 503 ជាចំនួនបឋម

$\Rightarrow a^2=1\Rightarrow a=1\Rightarrow\sqrt{\frac{503}{x+y}}=\frac{1}{b}$

បកស្រាយដូចគ្នា យើងឃើញថា: មានបណ្តាចំនួនគត់វិជ្ជមាន c,d យ៉ាងណាឲ្យ:

$$\sqrt{\frac{503}{y+z}}=\frac{1}{c};\sqrt{\frac{503}{z+x}}=\frac{1}{d}\Rightarrow\sqrt{\frac{503}{x+y}}+\sqrt{\frac{503}{y+z}}+\sqrt{\frac{503}{z+x}}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=m\quad (2)$$

យកចិត្តទុកដាក់ថា: b,c,d ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាននាំឲ្យ $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\leq 3$ ហើយដោយ m ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

នោះតាម (2) យើងបាន: $1\leq\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\leq 3$, កើតមាន 3 ករណីខាងក្រោម:

ករណីទី១: $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=3\Leftrightarrow b=c=d=1$ ពេលនោះតាម (2) យើងបាន:

$\frac{503}{x+y}=\frac{503}{y+z}=\frac{503}{z+x}=1\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=503\\ y+z=503\\ z+x=503\end{cases}$, បូកអង្គនឹងអង្គ $\Rightarrow 2(x+y+z)=1509$: សមីការនេះគ្មានរឹស

ព្រោះ អង្គខាងឆ្វេងគូ អង្គខាងស្តាំសេស $\Rightarrow$ ករណីទី១ មិនអាចកើតមាន។

ករណីទី២: $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}=2$

$\Rightarrow$ ក្នុង 3 ចំនួន b,c,d មានចំនួនមួយស្មើនឹង 1 ហើយ 2 ចំនួនផ្សេងទៀតស្មើនឹង 2 ។

បកស្រាយដូចគ្នានឹងករណីទី១ដែរ $\Rightarrow (2)$ គ្មានឫស។

ករណីទី៣: $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=3$, ដោយមិនធ្វើឲ្យបាត់លក្ខណៈទូទៅ យើងឧបមាថា:

$b \ge c \ge d > 1 \Rightarrow \frac{3}{d} \ge 1 \Rightarrow d=3$ រឺ $d=2$,

បើ $d=3 \Rightarrow b=c=3$, តាម (2) យើងបាន: $\frac{503}{x+y}+\frac{503}{y+z}+\frac{503}{z+x}=\frac{1}{9} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=9.503 \\ y+z=9.503 \\ z+x=9.503 \end{cases}$

បូកអង្គនឹងអង្គ $\Rightarrow 2(x+y+z)=27.2011$: សមីការនេះគ្មានឫសព្រោះ : អង្គខាងឆ្វេងគូ, អង្គខាងជាចំនួនសេស។

បើ $d=2 \Rightarrow \frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} b=4 \\ c=4 \end{cases}$ រឺ $\begin{cases} b=6 \\ c=3 \end{cases}$ (ព្រោះ $b \ge c \ge d$)

ចំពោះ $\begin{cases} b=4 \\ c=4 \\ d=2 \end{cases}$ ជំនួសចូល (2) យើងបាន $\begin{cases} x+y=16.503 \\ y+z=16.503 \\ z+x=4.503 \end{cases}$

$\Rightarrow x+y+z=17.503 \Rightarrow z=503; y=13.503; x=503$

ចំពោះ $\begin{cases} b=6 \\ c=3 \\ d=2 \end{cases}$ ជំនួសចូល (2) យើងបាន: $\begin{cases} x+y=36.503 \\ y+z=9.503 \\ z+x=4.503 \end{cases}$

$\Rightarrow 2(x+y+z)=49.503 \Rightarrow$ គ្មានឫស។

៦. តាង $A=\{a_1;a_2;...;a_{200}\}$ $(a_1<a_2<...<a_{200}); a_i \in \mathbb{Z}^+; i=1;2;...;200$

យើងដឹងថា $a_i;a_j;a_k$ $(1 \le i<j<k \le 200)$ ជាប្រវែងជ្រុងទាំងបីរបស់ត្រីកោណមិនទាលមួយ លុះត្រាតែ:

$a_i^2+a_j^2 \ge a_k^2$.

ករណីនោះសមមូលនឹង $a_1^2+a_2^2 \ge a_{200}^2$ ។

ដូចនោះ, $a_1^2 \ge a_{200}^2-a_2^2 \ge (a_2+198)^2-a_2^2=396a_2+198^2 \ge 396(a_1+1)+198^2$

$\Rightarrow a_1^2-396a_1-39600 \ge 0$

$\Rightarrow a_1 \ge 198+\sqrt{198^2+39600} \ge 478,7 \Rightarrow a_1 \ge 479$

$\Rightarrow a_i \ge 478+i$ $(i=1;2;...;200)$

តាង $A_0=\{479;480;...;678\}$ នោះពេល

$A=\{a_1;a_2;...;a_{200}\}(a_1<a_2<...<a_{200}); a_i \in \mathbb{Z}^+; i=1;2;...;200$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌរបស់ប្រធាន, យើងត្រូវការ $a_i \ge 478+i(i=1;2;...;200)$

ពេលនោះ $S(A) \ge S(A_0)$ ។ ម្យ៉ាងទៀត ជាក់ស្តែងឃើញថា A_0 ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌរបស់ប្រធាន (ព្រោះចំពោះបីចំនួន $a_i;a_j;a_k$ $(a_i<a_j<a_k) \in A_0$ ណាក៏ដោយ, គេបាន: $a_i^2+a_j^2 \ge 479^2+480^2>678^2>a_k^2$)

នាំឲ្យ តំលៃតូចបំផុតរបស់ $S(A)$ ស្មើ: $S(A_0)=\sum_{\substack{a,b,c \in A_0; \\ a \ne b, b \ne c, c \ne a}}(a+b+c)$

ចំពោះ $a \in A_0$ ណាក៏បាន, ចំនួនរបៀបជ្រើសយក b,c មាន C_{199}^2 ។ ដូចនេះ a ត្រូវបានរាប់ C_{199}^2 ដងក្នុង $S(A_0)$ ។ ដោយ a ជាចំនួនណាមួយនៅក្នុង A_0, នាំឲ្យចំនួននីមួយៗក្នុង A_0 ត្រូវបានរាប់ C_{199}^2 ដងក្នុង

$S(A_0)$ ។

ដូចនេះ, $S(A_0)=C_{199}^2.\sum_{a\in A_0} a=\frac{1}{2}\times 199\times 198\times\sum_{i=479}^{678} i=2279405700$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

វិញ្ញាសាស្នើទី១៦

១. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ: $\begin{cases}2\sqrt{x-1}+3\sqrt{5-y}+3xy+71=30y\\ \sqrt{6x+1}+2\sqrt{x}=\sqrt{6y+1}+2\sqrt{y}\end{cases}$

២. គេឲ្យស្វ៊ីត (u_n) ត្រូវបានកំណត់ដោយ: $u_1=3; u_{n+1}=u_n^2-3u_n+4, n=1,2,...$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា (u_n) ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូនកើន និងមិនទាល់?

ស្រាយបញ្ជាក់ថាស្វ៊ិត (v_n) កំណត់ដោយ: $v_n=\frac{1}{u_1-1}+\frac{1}{u_2-1}+...+\frac{1}{u_n-1}, n=1,2,...$ ជាស្វ៊ីតរួម និងរកលីមីតរបស់វា។

៣. រង្វង់ (I) ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC ប៉ះនឹងជ្រុង BC ត្រង់ D ។ ω ជារង្វង់ប៉ះនឹងជ្រុង BC ត្រង់ D ហើយប៉ះនឹងរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC ត្រង់ T, ចំពោះ A,T នៅខាងតែមួយធៀបនឹងបន្ទាត់ BC ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\angle ITA=90^0$ ។

៤. កំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់នៅលើ $\mathbb{R}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ:

$$x.f(y)+y.f(x)=f(x).f(y).(x+y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}, x+y\neq 0 \quad (1).$$

៥. រកគ្រប់បណ្តាឫសជាចំនួនគត់របស់សមីការ: $m^2n+1=m^2+2mn+2m+n$ ។

៦. គេឲ្យព្រីសមានបាតខាងលើ និងបាតខាងក្រោមជាបណ្តាបញ្ចកោណ $A_1A_2A_3A_4A_5$ និង $B_1B_2B_3B_4B_5$ ។ ជ្រុងនីមួយៗរបស់បញ្ចកោណទាំងពីរនេះ ក៏ដូចជាជ្រុងនីមួយៗក្នុងចំនោម 25 ជ្រុង $A_iB_j\ (i,j=\overline{1;5})$ សុទ្ធតែត្រូវបានលាបដោយពណ៌ក្រហម រឺខៀវ។ ដោយដឹងថា ត្រីកោណណាក៏ដោយ ដែលបង្កើតចេញពី 3 កំពូលរបស់ព្រីស ដែលជ្រុងទាំង 3 សុទ្ធតែត្រូវបានលាបពណ៌ ត្រូវមានជ្រុង 2 មានពណ៌ផ្សេងគ្នា។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា ជ្រុងទាំង 10 របស់បញ្ចកោណទាំងពីរ (នៅបាតខាងលើនិងបាតខាងក្រោម) សុទ្ធតែមានពណ៌ដូចគ្នា។

ចំលើយ

១. ពិនិត្យអនុគមន៍ $f(t)=\sqrt{6t+1}+2\sqrt{t}$ ចំពោះ $t\in[0;+\infty)$

$$f'(t)=\frac{3}{\sqrt{6t+1}}+\frac{1}{\sqrt{t}}>0\ \ \forall t\in(0;+\infty)$$

$f(t)$ កើននៅលើ $[0;+\infty)$

យើងបាន: $\sqrt{6x+1}+2\sqrt{x}=\sqrt{6y+1}+2\sqrt{y}\Leftrightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$

ដូចនេះ $2\sqrt{x-1}+3\sqrt{5-y}+3xy+71=30y$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}+3\sqrt{5-x}=-3x^2+30x-71$ លក្ខខណ្ឌ: $1\le x\le 5$

ពិនិត្យអនុគមន៍: $g(x)=2\sqrt{x-1}+3\sqrt{5-x},\ x\in[1;5]$

ចំពោះ $x\in(1;5)$ នាំឲ្យ $g'(x)=\frac{2\sqrt{5-x}-3\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}.\sqrt{5-x}}$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{29}{13}$,

$g(5)=4,\ g(5)=6,\ g\left(\frac{29}{13}\right)=2\sqrt{13}$

នាំឲ្យ $g(x)=2\sqrt{x-1}+3\sqrt{5-x}\geq 4\ \forall x\in[1;5]\Rightarrow g(x)=4$ ពេល $x=5$

ម្យ៉ាងទៀត $-3x^2+30x-71=-3(x-5)^2+4\leq 4\ \ \forall x\in[1;5]\Rightarrow$ អង្គខាងឆ្វេង $=4$ ពេល $x=5$

ដូចនេះ សមីការមានឬស $x=5$ (ផ្ទៀងផ្ទាត់) ហើយប្រព័ន្ធមានចំលើយ $x=y=5$ ។

២. $(a): u_{n+1}-u_n=(u_n-2)^2\geq 0$ ហើយដូចនោះ គឺ (u_n) ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូនកើន។

ឥឡូវ យើងស្រាយបញ្ជាក់ដោយវិចារអនុមានរួម ថា $u_n\geq n+2$

ជាក់ស្តែងសមភាពកើតមានពេល $n=1$ ។

ឧបមាថា ការសន្និដ្ឋានពិតចំពោះ $n=k\geq 1$ ។ ដូចនោះគឺ:

$$u_{k+1}=u_k(u_k-3)+4\geq (k+2)(k-1)\geq k+3.$$

ដូចនោះ $u_n\geq n+2$ ពេល $n=1,2,3,\ldots$ ហើយដូចនោះ ស្វ៊ីតមិនទាល់។

(b): តាមនិយមន័យវិចារអនុមានរួម របស់ស្វ៊ីតទាញបានថា:

$$\frac{1}{u_{k+1}-2}=\frac{1}{(u_k-1)(u_k-1)}=\frac{1}{u_k-2}-\frac{1}{u_k-1}$$

នាំឲ្យ $\frac{1}{u_k-2}=\frac{1}{u_k-2}-\frac{1}{u_{k+1}-2}$

ដោយការបូកបណ្តាសមភាពខាងលើចំពោះ $k=1,2,\ldots,n$ យើងបាន:

$$v_n=\frac{1}{u_1-2}-\frac{1}{u_{n+1}-2}=1-\frac{1}{u_{n+1}-2}$$

ដោយ $0\leq\frac{1}{u_{n+1}-2}\leq\frac{1}{n}$ ទាញបាន $\lim\frac{1}{u_{n+1}-2}=0$

ដូចនេះ $\lim v_n=1$ ។

៣. ដំបូងយើងស្រាយបញ្ជាក់ *Lemma*: រង្វង់ ω_1 ប៉ះក្នុងនឹងរង្វង់ ω_2 ត្រង់ T (ω_1 ស្ថិតនៅក្នុង ω_2)។ A,B ជាពីរចំនុចនៅលើ ω_2 $(A,B\neq T)$ ។ AF,BE ជាបន្ទាត់ប៉ះរបស់ ω_1 ត្រង់ F,E ។ ពេលនោះ $\frac{TA}{TB}=\frac{AF}{BE}$ ។

ពិតជាដូចនេះ, តាង A',B' រៀងគ្នាជាចំនុចប្រសព្វរបស់ TA,TB ទៅនឹង ω_1 ។ រង្វង់ ω_2 ជាបំលែងចាំងរបស់រង្វង់ ω_1 ធៀបនឹង T ។ តាមច្បាប់បំលែងចាំងនេះ A' បំលែងទៅជា A, B' បំលែងទៅជា B ។

ទាញបាន $\frac{TA}{TB}=\frac{AA'}{BB'}$ ។

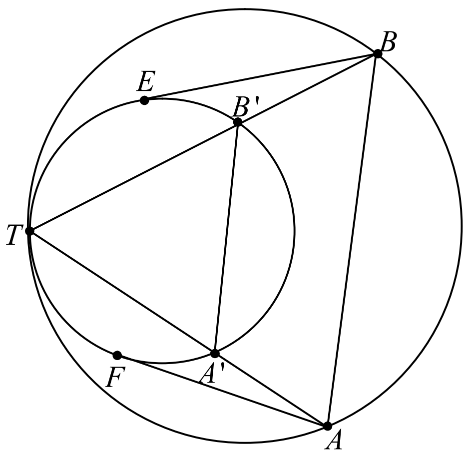
ដោយ AF,BE ជាបន្ទាត់ប៉ះនាំឲ្យយើងបាន $TA.AA'=AF^2;TB.BB'=BE^2$ ។

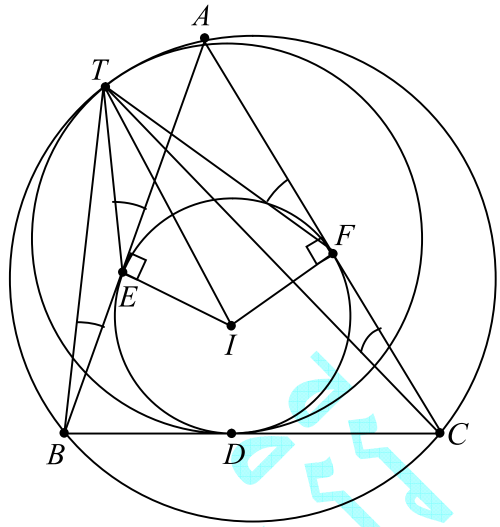
ទាញបាន $\left(\frac{TA}{TB}\right)^2=\frac{TA}{TB}.\frac{AA'}{BB'}=\left(\frac{AF}{BE}\right)^2\Rightarrow\frac{TA}{TB}=\frac{AF}{BE}$ ។ *Lemma* ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់។

ត្រឡប់មកលំហាត់វិញ។ តាង E,F រៀងគ្នាជាចំនុចប៉ះរបស់រង្វង់ (I) ទៅនឹង AB,AC ។

យើងបាន: $BD=BE,CD=CF$ ។

អនុវត្តន៍ *Lemma* យើងបាន: $\frac{TB}{TC}=\frac{BD}{CD}=\frac{BE}{CF}$ ។





ម្យ៉ាងទៀត $\angle EBT=\angle ABT=\angle ACT=\angle FCT$ ទាញបាន ΔTBE មានរាងដូចគ្នានឹង ΔTCF ។

ដូចនោះ $\Delta AET=\Delta AFT\Rightarrow A,T,E,F$ ស្ថិតនៅលើរង្វង់តែមួយ មានអង្កត់ផ្ចិត AI ។

ទាញបាន $\angle ATI=90^0$ ។

៤. ចំពោះលក្ខខណ្ឌ (1) ឲ្យ $x=y=1$, យើងបាន: $1.f(1)+1.f(1)=(1+1).f(1).f(1)$

$$\Leftrightarrow 2.f(1)=2[f(1)]^2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}f(1)=0\\ f(1)=1\end{array}\right.$$

យើងពិនិត្យមើលបណ្តាករណីខាងក្រោម:

ករណី $f(1)=0$

ឲ្យ $y=1$ ចូល (1) យើងបាន: $f(x)=0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

ករណី $f(1)=1$

ឲ្យ $y=1$ ចូល (1) យើងបាន: $x.f(1)+f(x)=f(x).f(1).f(x+1)$

$\Leftrightarrow x+f(x)=(x+1).f(x)\Leftrightarrow x\big(f(x)-1\big)=0$

ដោយ $x\neq 0$ នាំឲ្យ $f(x)=1$

បូករួមនឹងករណីទាំងពីរ យើងបាន:

$f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}$ និង $f(x)=\begin{cases}1 \text{ ពេល } & x\neq 0\\ a \text{ ពេល } & x=0\end{cases}$ a ជាចំនួនពិតណាក៏បាន។

ឃើញថាចំពោះ: $x,y\neq 0$ រឺ $x=y=0$ នាំឲ្យ (1) ផ្ទៀងផ្ទាត់។

ចំពោះ: $\begin{cases}x\neq 0\\ y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(x)=1\\ f(y)=a\end{cases}$

ពេលនោះ: $x.f(y)+y.f(x)=ax$ និង $(x+y)f(x)f(y)=(x+0).1.a=a.x$

សន្និដ្ឋាន: បណ្តាអនុគមន៍ខាងលើផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង (1) ។

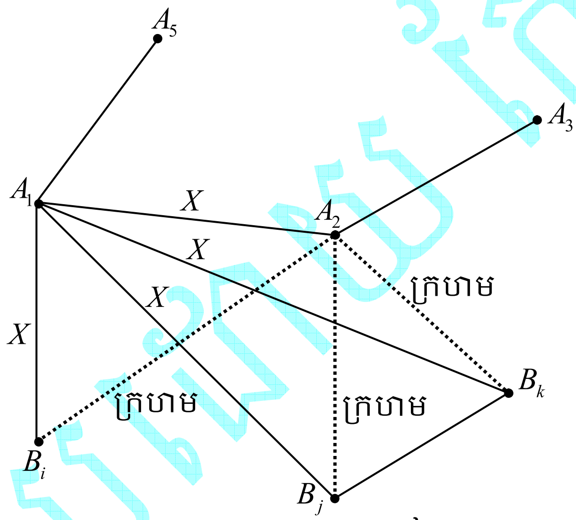
៥. យើងមាន: $m^2(n-1)=2m(n+1)+n-1=2m(n-1)+4m+(n-1)$

តាង $k=n-1$ នោះសមភាពក្លាយទៅជា: $m^2k=2mk+4m+k\quad(*)$

បើ $k=0$, គឺ $m=0$ ។ វាឲ្យឫស $m=0,n=1$ ។ ហើយបើ $m=0$, នោះ: $k=0$, នាំឲ្យយើងអាចឧបមាថា m និង k សុទ្ធតែខុសពី 0 ។

តាម (*) m ត្រូវតែចែកដាច់នឹង k ហើយ k ត្រូវតែចែកដាច់នឹង $4m$ ។ តាង $k=mh$ ។
ដូចនោះគឺ h ចែកដាច់នឹង 4, ទាញបាន $h=\pm1,\pm2$ រឺ ±4 ។
យើងក៏អាចសរសេរឡើងវិញ (*) ក្រោមរាង $(m^2-2m-1)h-4=0$ ។
+ បើ $h=1$, នោះយើងបាន $m^2-2m-5=0$, វាមិនមានឫសជាចំនួនគត់។
+ បើ $h=-1$, នោះយើងបាន $m^2-2m+3=0$, វាមិនមានឫសជាចំនួនគត់។
+ បើ $h=2$, នោះ $m^2-2m-3=0$, វាមានឫស $m=-1$ រឺ $m=3$ ។
+ បើ $h=-2$, នោះ $m^2-2m+1=0$, ឲ្យឫស $m=1$ ។
+ បើ $h=4$, នោះ $m^2-2m-2=0$, មិនមានឫសជាចំនួនគត់។
+ បើ $h=-4$, នោះ $m^2-2m=0$, ឲ្យបណ្តាឫស $m=0, m=2$ ។
ដូចនេះ បណ្តាឫសរបស់សមីការគឺ $(m,n)=(-1;-1),(0;1),(1;-1),(2;-7),$ រឺ $(3;7)$ ។

៦. ដំបូងយើងស្រាយបញ្ជាក់ថា ជ្រុងទាំង 5 របស់បញ្ចកោណនិយ័ត $A_1A_2A_3A_4A_5$ មានពណ៌ដូចគ្នា។
ឧបមាថា ជ្រុងទាំង 5 មិនមានពណ៌ដូចគ្នា។ ពេលនោះមានជ្រុងពីរណានោះមានពណ៌ផ្សេងគ្នា, ឧទាហរណ៍ថាជា A_1A_2 និង A_1A_5 ។



យើងពិនិត្យ 5 ជ្រុង A_1B_j $(j=1,...,5)$ ។ ដោយមានតែ 5 ជ្រុងត្រូវបានលាបដោយពណ៌ពីរ នោះតាមទ្រឹស្តីបទ *Dirichlet* ក្នុងចំនោមពួកវានោះមានយ៉ាងតិច 3 ជ្រុងដែលមានពណ៌ដូចគ្នា, យើងឧបមាថា 3 ជ្រុងនេះគឺមានពណ៌ខៀវ ហើយ A_1A_2 ក៏មានពណ៌ខៀវដែរ។ ឧបមាថាជ្រុងទាំងបី A_2B_i, A_2B_j, A_2B_k ត្រូវមានពណ៌ក្រហមដូចគ្នា។ កំពូលពីរក្នុងចំនោម 3 កំពូលត្រូវនៅក្បែរគ្នា បើពីរកំពូលនេះបង្កើតបានជាជ្រុងលាបពណ៌ក្រហម នោះវាបង្កើតបានជាត្រីកោណមួយមានជ្រុងទាំងបីលាបពណ៌ក្រហម, ហើយបើកំពូលទាំង 2 នោះបង្កើតបានជាជ្រុងដែលលាបពណ៌ខៀវ នោះពួកវានឹងបង្កើតជាមួយនឹង A_1 បង្កើតបានជាត្រីកោណមួយមានជ្រុងទាំង 3 លាបដោយពណ៌ខៀវ, ផ្ទុយនឹងបំរាប់ប្រធាន។
ដូចគ្នានឹងខាងលើដែរ, យើងក៏ស្រាយបញ្ជាក់បានថា គ្រប់ជ្រុងទាំង 5 របស់បញ្ចកោណ $B_1B_2B_3B_4B_5$ ក៏សុទ្ធតែមានពណ៌ដូចគ្នាដែរ។
ឥឡូវ យើងស្រាយបញ្ជាក់ថា ពណ៌របស់បណ្តាជ្រុងនៃបញ្ចកោណទាំងពីរខាងលើគឺដូចគ្នា។
ឧបមាប្រាសមកវិញ, ឧទាហរណ៍ថា, ជ្រុងទាំង 5 របស់បញ្ចកោណ $A_1A_2A_3A_4A_5$ មានពណ៌ខៀវ ហើយជ្រុងទាំង 5 របស់បញ្ចកោណ $B_1B_2B_3B_4B_5$ មានពណ៌ក្រហម

ច្បាស់ណាស់ ជ្រុង 3 ក្នុងចំនោម 5 ជ្រុង A_1B_i $(i=1,...,5)$ ត្រូវមានពណ៌ដូចគ្នា។ ឧបមាថាជាពណ៌ក្រហម។ បកស្រាយដូចខាងលើ យើងបានកំពូល 2 ក្នុងចំនោម 3 កំពូល B_i នោះត្រូវតែជាកំពូលនៅក្បែរគ្នា, ពីនោះគឺ 2 កំពូលនេះបង្កើតជាមួយនឹង A_1 បានជាត្រីកោណមួយមានជ្រុងទាំងបីមានពណ៌ក្រហម, ផ្ទុយពីការឧបមា, ជ្រុង 3 ក្នុងចំនោម 5 ជ្រុង A_2B_i $(i=1,...,5)$ ត្រូវមានពណ៌ខៀវដូចគ្នា។

ក្នុងចំនោម 3 ជ្រុង A_1B_i និង 3 ជ្រុង A_2B_i ដែលទើបបង្ហាញខាងលើ ប្រាកដជាត្រូវមានកំពូល B_k ណាមួយរួមគ្នា។ ពេលនោះ B_k នឹងបង្កើតជាមួយនឹង A_1, A_2 បានត្រីកោណមួយមានជ្រុងទាំង 3 មានពណ៌ខៀវ, ផ្ទុយនឹងបំរាប់ប្រធាន (ពិនិត្យមើលរូប)

ដូចនេះ គ្រប់បណ្តាជ្រុងទាំង 10 របស់បញ្ចកោណទាំង 2 (នៅបាតខាងលើនិងខាងក្រោម) សុទ្ធតែមានពណ៌ដូចគ្នា។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

វិញ្ញាសាស្នើទី១៧

១. ដោះស្រាយសមីការ: $\sin^{2010} x+\cos^{2010} x=1 \quad (1)$

២. គេឲ្យ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានគូ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $2^nC_n^0+2^{n-2}C_n^2+2^{n-4}C_n^4+...+2^2C_n^{n-2}+C_n^n=\dfrac{3^n+1}{2}$

៣. គេឲ្យត្រីកោណ ABC មានគ្រប់មុំសុទ្ធតែស្រួច, តាង I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC ។ បន្ទាត់ d មួយប្រែប្រួល, តែងកាត់តាម I , កាត់ជ្រុងទាំងពីរ AB និង AC រៀងគ្នាត្រង់ M និង N
ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{1}{AM}+\dfrac{1}{AN}$ មានតំលៃមិនប្រែប្រួល។

៤. គេឲ្យ a,b,c ជាចំនួនវិជ្ជមានបី ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a+b+c\geq 3abc$ ។
ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^2+b^2+c^2\geq 3abc$ ។

៥. គេឲ្យស្វ៊ីត (x_n) ផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1=4; x_{n+1}=x_n^2-2;\ \forall n\geq 1$ ។
រក $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_1x_2\ldots x_n}$ ។

៦. រកគ្រប់បណ្តាអនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់: $xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x)f(y)\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ ។

ចំលើយ

១. $(1)\Leftrightarrow \sin^{2010}x+\cos^{2010}x=\sin^2 x+\cos^2 x$

$\Leftrightarrow \sin^2 x\left(\sin^{2008}x-1\right)=\cos^2 x\left(1-\cos^{2008}x\right) \quad (2)$

យើងឃើញថា $\begin{cases}\sin^2 x\geq 0\\ \sin^{2008}x\leq 1\end{cases} \Rightarrow \sin^2 x\left(\sin^{2008}x-1\right)\leq 0, \forall x$

ដោយ $\begin{cases}\cos^2 x\geq 0\\ 1-\cos^{2008}x\geq 0\end{cases} \Rightarrow \cos^2 x\left(1-\cos^{2008}x\right)\geq 0,\ \forall x$

ដូចនោះ: $(2)\Leftrightarrow\begin{cases}\sin^2 x\left(\sin^{2008}-1\right)=0\\ \cos^2 x\left(1-\cos^{2008}x\right)=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=\pm1\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x=\pm1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=m\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+m\pi\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+n\pi\\ x=m\pi\end{array}\right.\end{cases} \quad (m,n\in\mathbb{Z})$$

ដូចនេះ ឬសរបស់សមីការគឺ: $x=k\dfrac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$ ។

២. ពិនិត្យ $(x+1)^n=C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}+C_n^2x^{n-2}+...+C_n^{n-1}x+C_n^n$ (*)

$(x-1)^n=C_n^0x^n-C_n^1x^{n-1}+C_n^2x^{n-2}-...-C_n^{n-1}x+C_n^n$ (**) (ព្រោះ n ជាចំនួនគូ)

បូក (*) និង (**) អង្គនឹងអង្គយើងបាន:

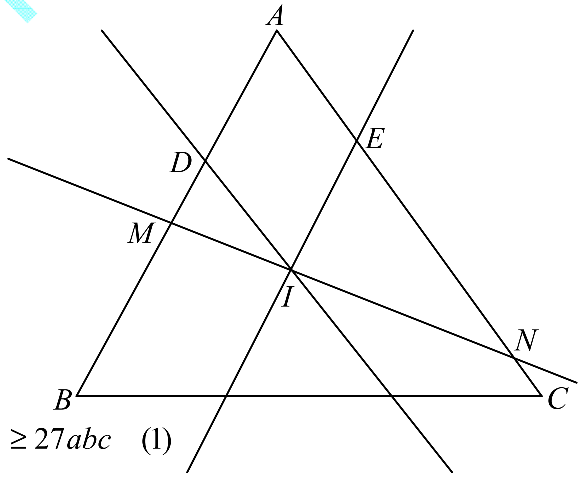
$(x+1)^n+(x-1)^n=2\left(C_n^0x^n+C_n^2x^{n-2}+...+C_n^n\right)$ (***)

ក្នុង (***) ឲ្យ $x=2$ យើងបាន: $3^n+1=2\left(2^nC_n^0+2^{n-2}C_n^2+...+2^2C_n^{n-2}+C_n^n\right)$

ពីនោះយើងបាន $2^nC_n^0+2^{n-2}C_n^2+2^{n-4}C_n^4+...+2^2C_n^{n-2}+C_n^n=\dfrac{3^n+1}{2}$ ។

៣. តាម I, យើងសង់បន្ទាត់ស្របនឹង AC ,កាត់ AB ត្រង់ D, និងសង់បន្ទាត់ស្របនឹង AB កាត់ AC ត្រង់ E ។

ឃើញថា $ADIE$ ជាចតុកោណស្មើ។



តាង $AD=DI=IE=EA=k$ (k មិនប្រែប្រួល)

យើងបាន: $EI\parallel AM\Rightarrow\dfrac{NI}{NM}=\dfrac{EI}{AM}=\dfrac{k}{AM}$ (1)

$DI\parallel AN\Rightarrow\dfrac{MI}{NM}=\dfrac{DI}{AN}=\dfrac{k}{AN}$ (2)

ដោយ $\dfrac{MI}{NM}+\dfrac{IN}{NM}=\dfrac{MN}{NM}=1$ នោះតាម (1)&(2) យើងបាន:

$\dfrac{k}{AM}+\dfrac{k}{AN}=1$, ឬ $\dfrac{1}{AM}+\dfrac{1}{AN}=\dfrac{1}{k}$ (មិនប្រែប្រួល)

៤. ចំពោះ: $a,b,c>0$, យើងបាន $a+b+c\ge3\sqrt[3]{abc}\Rightarrow(a+b+c)^3\ge27abc$ (1)

តាមបំរាប់យើងបាន: $a+b+c\ge3abc$ (2)

តាម (1)&(2), យើងបាន: $(a+b+c)^4\ge81a^2b^2c^2$

ឬ $(a+b+c)^2\ge9.abc$ (3)

ម្យ៉ាងទៀត $a^2+b^2+c^2-\dfrac{1}{3}(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2-\dfrac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\right)$

$=\dfrac{2}{3}\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)=\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2}.\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$

$=\dfrac{1}{3}.\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\ge0$

ទាញបាន $a^2+b^2+c^2\ge\dfrac{1}{3}(a+b+c)^2\ge\dfrac{1}{3}9abc\ge3abc$

ដូចនេះ: $a^2+b^2+c^2\ge3abc$ ។

៥. ច្បាស់ណាស់គឺ $x_n\ge4,\ \forall n\ge1$ ។

យើងមាន: $x_{n+1}^2-4=\left(x_n^2-2\right)^2-4=x_n^4-4x_n^2+4-4=x_n^2\left(x_n^2-4\right)$

$$=x_n^2\left[\left(x_{n-1}^2-2\right)^2-4\right]=x_n^2\left[x_{n-1}^4-4x_{n-1}^2+4-4\right]=x_n^2\left[x_{n-1}\left(x_{n-1}^2-4\right)\right]$$

....

$$=x_n^2x_{n-1}^2\ldots x_1^2\left(x_1^2-4\right)$$

$\Rightarrow x_{n+1}^2-4=x_1^2x_2^2\ldots x_n^2\left(x_1^2-4\right)$

ជំនួស $x_1=4$ ចូល (1) យើងបាន:

$$x_{n+1}^2-4=x_1^2x_2^2\ldots x_n^2.12\Rightarrow\frac{x_{n+1}^2-4}{x_1^2x_2^2\ldots x_n^2}=12\Rightarrow\frac{x_{n+1}^2}{x_1^2x_2^2\ldots x_n^2}-\frac{4}{x_1^2x_2^2\ldots x_n^2}=12$$

$$\Rightarrow\left(\frac{x_{n+1}}{x_1x_2\ldots x_n}\right)^2=12+\frac{4}{x_1^2x_2^2\ldots x_n^2}\Rightarrow\frac{x_{n+1}}{x_1x_2\ldots x_n}=\sqrt{12+\frac{4}{(x_1x_2\ldots x_n)^2}}$$

សង្កេត: $x_{n+1}-x_n=x_n^2-x_n-2=(x_n+1)(x_n-2)>0,\ \forall n\geq 1$

$\Rightarrow 4=x_1<x_2<x_3<\ldots<x_n\to+\infty$ ពេល $n\to+\infty$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_1x_2\ldots x_n}=2\sqrt{3}$ ។

៦. $xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x)f(y)\quad\forall x,y\in\mathbb{R}\quad(1)$

ឲ្យ $x=y=1$ យើងបាន $2f(1)=2(f(1))^2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}f(1)=0\\f(1)=1\end{array}\right.$

$a)$ ពិនិត្យករណី $f(1)=0$

ឲ្យ $y=1$ ចូល (1) ។ យើងបាន $f(x)=0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

$b)$ ពិនិត្យករណី $f(1)=1$

ឲ្យ $y=1$ យើងបាន $x+f(x)=(x+1)f(x)\Rightarrow x(f(x)-1)=0$

ដូចនោះ ចំពោះគ្រប់ $x\neq 0$ នាំឲ្យ $f(x)=1$

ប្ញូករួមទាំងពីរករណី យើងបាន: $f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}$

និង $f(x)=\begin{cases}1 & \text{ពេល } x\neq 0\\ a & \text{ពេល } x=0\end{cases}$ a ចំនួនពិតណាក៏បាន។

ផ្ទៀងផ្ទាត់ឡើងវិញ: ចំពោះ $xy\neq 0$ រឺ $x=y=0$ នាំឲ្យ (1) ផ្ទៀងផ្ទាត់។

ចំពោះ: $\begin{cases}x\neq 0\\y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(x)=1\\f(y)=a\end{cases}$

ពេលនោះ: $xf(y)+yf(x)=ax$ និង $(x+y)f(x)f(y)=(x+0)a=ax$

ដូចនេះ បណ្តាអនុគមន៍ខាងលើផ្ទៀងផ្ទាត់ប្រធាន។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

វិញ្ញាសាស្នើទី១៨

១. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ: $\begin{cases} 512x^9-192x^3-108x^2-36x-4=0 & (1) \\ x^4-x^2y+y^2=\sqrt{\dfrac{x^8+y^4}{2}} & (2) \end{cases}$

២. គេឲ្យស្វ៊ីត (x_n) កំណត់ដោយ $x_1=\sqrt{2}, x_{n+1}=\sqrt{\dfrac{2x_n}{1+x_n}}$ $(2\le n\in\mathbb{Z})$

គណនា $\lim\prod_{i=1}^{n}x_n$ ។

៣. គេឲ្យត្រីកោណ ABC មានទីប្រជុំទំងន់ G និងចារឹកក្នុងរង្វង់ $(O;R)$ (ចំនុច G មិនត្រួតនឹង O)។ ចំនុច M ស្ថិតក្នុងរង្វង់ផ្ចិត $(O;R)$ យ៉ាងណាឲ្យបណ្តាខ្សែធ្នូកាត់តាម M គឺ AA', BB', CC' ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង:

$$\frac{MA}{MA'}+\frac{MB}{MB'}+\frac{MC}{MC'}=3$$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា M ស្ថិតនៅលើរង្វង់អង្កត់ផ្ចិត OG ។

៤. ឧបមាថា α និង β ជាឫសទាំងពីររបស់សមីការ: $4x^2-4tx-1=0$ $(t\in\mathbb{R})$ ។

$[\alpha;\beta]$ ជាដែនកំណត់របស់អនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{2x-t}{x^2+1}$ ។

1.រក $g(t)=\max f(x)-\min f(x)$

2.ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះ $u_i\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ $(i=1,2,3)$, បើ $\sin u_1+\sin u_2+\sin u_3=1$,

នោះគេបាន: $\dfrac{1}{g(\tan u_1)}+\dfrac{1}{g(\tan u_2)}+\dfrac{1}{g(\tan u_3)}<\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$ ។

៥. រកគ្រប់បណ្តាគូចំនួនគត់ $(x;y)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់: $x^3+9xy+127=y^3$ ។

៦. កំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន N តូចបំផុតដែលមានលេខ 5ខ្ទង់ ដើម្បីឲ្យ $2N$ ក៏មានលេខ5ខ្ទង់ ហើយគ្រប់បណ្តាលេខ $0,1,2,...,9$ សុទ្ធតែមានវត្តមានក្នុងពីរចំនួន N និង $2N$ ។

ចំលើយ

១. លក្ខខណ្ឌ $x,y\in\mathbb{R}$

តាម (1) យើងបំលែងទៅជា: $(8x^3)^3+3.8x^3=(6x+1)^3+(6x+1)$

ពិនិត្យអនុគមន៍ $f(t)=t^3+3t, t\in\mathbb{R}$, យើងបាន $f'(t)=3t^2+3>0\ \forall t\in\mathbb{R}$

ទាញបាន $f(t)$ កើននាំឲ្យយើងបាន: $8x^3=6x+1\Leftrightarrow 4x^3-3x=\dfrac{1}{2}$

តាង $t=\cos\alpha, \alpha\in[0;\pi]$, យើងបាន: $4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=\cos\dfrac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \cos 3\alpha=\cos\dfrac{\pi}{3}\Leftrightarrow \alpha=\pm\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{k2\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z})$

ដូចនេះ យើងបានបណ្តាឫស $\cos\dfrac{\pi}{9}, \cos\dfrac{5\pi}{9}, \cos\dfrac{7\pi}{9}$ ។

យើងបានសមភាព: $2\left(x^4-x^2y+y^2\right)^2=x^8+y^4+\left(y-x^2\right)^4$

$\Rightarrow$ អង្គខាងឆ្វេង $(2)=x^4-x^2y+y^2\geq\sqrt{\dfrac{x^8+y^4}{2}}=$ អង្គខាងស្ដាំ (2)

សញ្ញា $"="$ កើតមានពេល $y=x^2$ ។

ដូចនេះ $S=\left\{(x_1;x_1^2);(x_2;x_2^2);(x_3;x_3^2)\right\}$ ។ ចំពោះ $x_1=\cos\dfrac{\pi}{9},x_2=\cos\dfrac{5\pi}{9},x_3=\cos\dfrac{7\pi}{9}$ ។

២. តាង $x_1=\sqrt{2}=\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{4}}$ ទាញបាន $x_2=\sqrt{\dfrac{2.\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{4}}}{1+\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{4}}}}=\sqrt{\dfrac{2}{1+\cos\dfrac{\pi}{4}}}=\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{8}},...$

ស្រាយបញ្ជាក់ដោយវិចារអនុមានរួម យើងបាន: $x_n=\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}$ (1)

ពេលនោះ $\prod_{i=1}^{n}x_n=\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{4}}.\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{8}}.\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{16}}.....\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}=\dfrac{1}{A}$

$$\Rightarrow\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}.A=\cos\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{8}.\cos\frac{\pi}{16}.....\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}.\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$$
$$=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{8}.\cos\frac{\pi}{16}.....\cos\frac{\pi}{2^n}.\sin\frac{\pi}{2^n}$$
$$=\frac{1}{2^2}\cos\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{8}.\cos\frac{\pi}{16}.....\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}.\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}...=\frac{1}{2^n}\sin\frac{\pi}{2}$$

$$A=\frac{1}{2^n}.\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\frac{1}{2^n}.\frac{2^{n+1}}{\pi}.\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

ទាញបាន $\lim A=\dfrac{2}{\pi}\Rightarrow\lim\prod_{i=1}^{n}x_n=\dfrac{\pi}{2}$

៣. ក្នុងត្រីកោណ ABC, តាង a,b,c រៀងគ្នាជាប្រវែងជ្រុង BC,CA,AB តាមលំដាប់ហើយ m_a,m_b,m_c រៀងគ្នាជាប្រវែងបន្ទាត់មេដ្យានគូសពីកំពូល A,B,C តាមលំដាប់។

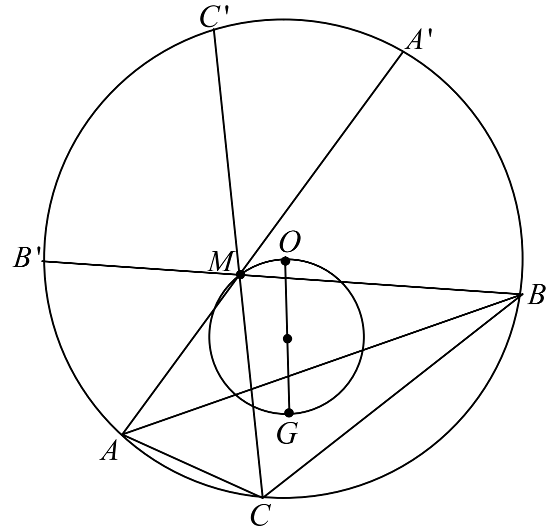
យើងបាន: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

$$\Rightarrow MA^2+MB^2+MC^2=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2$$
$$=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2+2\overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)$$
$$=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$$
$$=3MG^2+\frac{4}{9}\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2\right)=3MG^2+\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$\Rightarrow MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)\qquad(1)$$

ដូចនេះ ពេលយើងជំនួស M ដោយចំនុច O យើងបាន:

$$(1)\Rightarrow OA^2+OB^2+OC^2=3OG^2+\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$



$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2=9\left(R^2-OG^2\right) \qquad (2)$$

ដោយ $MA.MA'=MB.MB'=MC.MC'=R^2-OM^2$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MA'}=\frac{MA^2}{MA.MA'}=\frac{MA^2}{R^2-OM^2}$$

ដូចគ្នាដែរ យើងបាន: $\frac{MB}{MB'}=\frac{MB^2}{R^2-OM^2}$ និង $\frac{MC}{MC'}=\frac{MC^2}{R^2-OM^2}$

តាមបំរាប់យើងបាន: $\frac{MA}{MA'}+\frac{MB}{MB'}+\frac{MC}{MC'}=3\Rightarrow\frac{MA^2+MB^2+MC^2}{R^2-OM^2}=3$

$$(1)\Rightarrow 3MG^2+\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)=3R^2-3OM^2$$

$$(2)\Rightarrow 3MG^2+3\left(R^2-OG^2\right)=3R^2-3OM^2$$

$$\Rightarrow MG^2+OM^2=OG^2$$

រឺ ចំនុច M ស្ថិតនៅលើរង្វង់អង្កត់ផ្ចិត OG ។

៤. 1. យក $\alpha\le x_1<x_2\le\beta$ នាំឲ្យ $4x_1^2-4tx_1-1\le 0, 4x_2^2-4tx_2-1\le 0$

ដូចនោះ: $4\left(x_1^2+x_2^2\right)-4t\left(x_1+x_2\right)-2\le 0$

$$2x_1x_2-t\left(x_1+x_2\right)-\frac{1}{2}<0$$

តែ $f(x_2)-f(x_1)=\frac{2x_2-t}{x_2^2+1}-\frac{2x_1-t}{x_1^2+1}=\frac{(x_2-x_1)[t(x_1+x_2)-2.x_1x_2+2]}{\left(x_2^2+1\right)\left(x_1^2+1\right)}$

ហើយ $t(x_1+x_2)-2x_1x_2+2>t(x_1+x_2)-2x_1x_2+\frac{1}{2}>0$

ដូចនោះ: $f(x_2)-f(x_1)>0$

ដូចនេះ, $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើននៅលើចន្លោះ $[\alpha;\beta]$ ។

ដោយ $\alpha+\beta=t$ និង $\alpha.\beta=-\frac{1}{4}$, នាំឲ្យ $g(t)=\max f(x)-\min f(x)=f(\beta)-f(\alpha)$

$$=\frac{\sqrt{t^2+1}\left(t^2+\frac{5}{2}\right)}{t^2+\frac{25}{16}}=\frac{8\sqrt{t^2+1}\left(2t^2+5\right)}{16t^2+25}$$

2. យើងមាន: $g(\tan u_i)=\dfrac{\dfrac{8}{\cos u_i}\left(\dfrac{2}{\cos^2 u_i}+3\right)}{\dfrac{16}{\cos^2 u_i}+9}=\dfrac{\dfrac{16}{\cos u_i}+24\cos u_i}{16+9\cos^2 u_i}$

$$\geq \frac{2\sqrt{16\times 24}}{16+9\cos^2 u_i}=\frac{16\sqrt{6}}{16+9\cos^2 u_i}\quad (i=1,2,3)$$

ទាញបាន $\sum_{i=1}^{3}\dfrac{1}{g(\tan u_i)}\leq \dfrac{1}{16\sqrt{6}}\sum_{i=1}^{3}\left(16+9\cos^2 u_i\right)=\dfrac{1}{16\sqrt{6}}\left(16.3+9.3-9\sum_{i=1}^{3}\sin^2 u_i\right)$

ដោយ $\sum_{i=1}^{3}\sin u_i=1$, និង $u_i\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right), i=1,2,3$

យើងបាន $3\sum_{i=1}^{3}\sin^2 u_i>\left(\sum_{i=1}^{3}\sin u_i\right)^2=1$

នាំឲ្យ $\dfrac{1}{g(\tan u_1)}+\dfrac{1}{g(\tan u_2)}+\dfrac{1}{g(\tan u_3)}<\dfrac{1}{16\sqrt{6}}\left(75-9\times\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$ ។

៥. តាង $x=y+z, z\in\mathbb{Z}$

សមីការក្លាយទៅជា $(3z+9)y^2+\left(3z^2+9z\right)y+\left(z^3+127\right)=0$

សមីការខាងលើជាសមីការដឺក្រេទីពីរនៃ y ។

យើងបាន: $\Delta=(3z+9)^2.z^2-4(3z+9)(z^3+127)=-(3z+9)(z^3-9z^2+508)$

ហើយ $z^3-9z^2+508=z^2(z-9)+508$ មិនអវិជ្ជមានលុះត្រាតែ $z\neq -5$

$\Delta\geq 0\Leftrightarrow z=-5;-4;-3$ ដោយ $z^3+127\equiv 0 \pmod 3$ ដូចនោះយើងគ្រាន់តែយក $z=-4$

យើងបានបណ្ដាឬសរបស់សមីការគឺ $(x;y)=(3;7),(-7;-3)$ ។

៦. ឧបមាថា N ជាចំនួន $ABCDE$ និង $2N$ គឺ $FGHIJ$ ក្នុងនោះ A,B,C,D,E,F,G,H,I,J គឺជាបណ្ដាលេខផ្សេងគ្នា យកចេញពីបណ្ដាលេខ $0,1,2,3,...,9$ ។

ចំនួនតូចបំផុតដែល A អាចយកបានគឺ 1 ។

ពិនិត្យ $A=1$ ។ ពេលនោះ $F=2$ ។ ចំនួនតូចបំផុតដែល B អាចយកបានគឺ 3 (B មិនអាចស្មើ 0 ព្រោះអាចនឹងត្រួតគ្នា 2 ដងលេខ 0, រឺត្រួតគ្នា 2 ដងលេខ 1), ពេលនោះ ចំនួនតូចបំផុតដែល C អាចយកបានគឺ 4, ត្រូវគ្នានឹងយើងបាន $G=6$ ។

ឥឡូវ, ចំនួនតូចបំផុតដែល D អាចយកបានគឺ 5 ។ ទាញបាន $H=9$, ព្រោះ $H=2C+1$ ។

បន្តទៀត, ចំនួនតែមួយគត់ដែល E នឹងយកគឺ 8 (ព្រោះបើ $E=0,7$ នោះត្រូវជាន់លេខគ្នា), តែពេល $E=8$ នោះ $I=1$ (មិនសមហេតុផល ព្រោះ $A=1$)។

ដូចនោះ D មិនអាចស្មើ 5 ។ ឧបមាថា D យកតំលៃតូចបំផុតបន្តទៀតគឺ 7 (ព្រោះបានមាន $G=6$)។

ពេលនោះ $H=9=(2C+1)$ នាំឲ្យ $E=8$ ដូចខាងលើ។

តែឥឡូវ យើងជួបនឹងភាពផ្ទុយគ្នាម្ដងទៀត ព្រោះ $J=6$ (ជាន់លេខគ្នា)

ឧបមាថា $D=8$, ទាញបាន $H=9$ ។ ពេលនេះ, ចំនួនតូចបំផុតដែល E អាចយកគឺ 5 ។

យើងបាន $2E=10$ នាំឲ្យ $J=0$, ពីនោះ $I=7$ ព្រោះ $2D+1=17$ ។

សរុបមក, យើងបានចំនួន N ផ្ទៀងផ្ទាត់ប្រធានគឺ $N=13485$, $2N=26970$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

វិញ្ញាសាស្នើទី១៩

១. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} 15x^2+2xy=9 & (1) \\ 15(1-3x)^4+4xy(1-3x)^2=36x^2 & (2) \end{cases}$

២. ចំពោះចំនួនគត់ធម្មជាតិ $k>0$ នីមួយៗ, ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំនួន $\left(2+\sqrt{5}\right)^{2k}$ អាចសរសេរបានក្រោមរាង $a_k+b_k\sqrt{5}$ ចំពោះ a_k,b_k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានជានិច្ច។ រកទំនាក់ទំនងកំណត់ស្វ៊ីត $\{a_k\},\{b_k\}$ ចំពោះ $k=1,2,3,\ldots$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ $k\ge 2$ យើងបាន $a_{k-1}a_{k+1}-5b_k^2$ ជាចំនួនថេរមួយ។

៣. គេឲ្យរង្វង់ (O) និងខ្សែធ្នូ UV; M ជាចំនុចមួយនៅលើ UV; AC និង BD ជាខ្សែធ្នូពីររបស់រង្វង់កាត់តាម M ហើយ X,Y ជាចំនុចប្រសព្វរបស់ BC,AD នឹង UV តាមលំដាប់។
ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\dfrac{1}{MX}+\dfrac{1}{MV}=\dfrac{1}{MY}+\dfrac{1}{MU}$ ។

៤. រកគ្រប់បណ្តាពហុធា $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ ផ្ទៀងផ្ទាត់: $P(x).P(x+1)=P(x^2+2), \forall x\in\mathbb{R}$ ។

៥. គេឲ្យបណ្តាចំនួនគត់ a,b មានលក្ខណៈកំណត់ដោយ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន n គេបាន $2^n a+b$ ជាចំនួនការេប្រាកដ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a=0$ ។

៦. គេឲ្យចំនួនគត់ $n\ge 2$ ។ រកចំនួន បណ្តាចំលាស់ $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ របស់ $(1,2,3,\ldots,n)$ ដើម្បីឲ្យមានតែមួយគត់នូវលេខសន្ទស្សន៍ $i\in\{1,2,\ldots,n-1\}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_i>a_{i+1}$ ។

ចំលើយ

១. + សង្កេត: $x=0$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ប្រព័ន្ធសមីការ, ចែកអង្គទាំងពីររបស់សមីការ (2) នឹង $4x^2>0$,

យើងបានសមីការ: $15\left[\dfrac{(1-3x)^2}{2x}\right]^2+2\dfrac{(1-3x)^2}{2x}y=9 \quad (3)$

+ តាង $t=\dfrac{(1-3x)^2}{2x}$, ជំនួសចូល (3) យើងបានសមីការ: $15t^2+2at=9 \quad (4)$

+ តាម (1) និង (4) យើងបាន: $(x-t)(15x+15t+2y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=t \\ 15x+15t+2y=0 \end{array}\right.$

+ ចំពោះ $x=t \Leftrightarrow 7x^2-6x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3-\sqrt{2}}{7} \Rightarrow y=\dfrac{188+45\sqrt{2}}{7\left(3-\sqrt{2}\right)} \\ x=\dfrac{3+\sqrt{2}}{7} \Rightarrow y=\dfrac{188-45\sqrt{2}}{7\left(3+\sqrt{2}\right)} \end{array}\right.$

+ តាម $15x+15t+2y=0 \Leftrightarrow 2y=-15x-15t$, ជំនួសចូលសមីការ (1):

$$15x^2-15x\left(x+\frac{9x^2-6x+1}{2x}\right)=9 \Leftrightarrow 45x^2-30x+11=0 \text{ (សមីការគ្មានឫស)}$$

+ ដូចនេះ ប្រព័ន្ធមានចំលើយ: $\left(\dfrac{3-\sqrt{2}}{7};\dfrac{88+45\sqrt{2}}{7\left(3-\sqrt{2}\right)}\right),\left(\dfrac{3+\sqrt{2}}{7};\dfrac{188-45\sqrt{2}}{7\left(3+\sqrt{2}\right)}\right)$

២. យើងស្រាយបញ្ជាក់ $\left(2+\sqrt{5}\right)^{2k}=a_k+b_k\sqrt{5}$ ដោយវិចារអនុមានរួម។

$k=1$ សំណើរពិត។
ឧបមាថាសំណើរពិតចំពោះ k ។
យើងបាន: $\left(2+\sqrt{5}\right)^{2(k+1)}=\left(2+\sqrt{5}\right)^{2k}\left(2+\sqrt{5}\right)^{2}$

$$=\left(a+k+b_k\sqrt{5}\right)\left(9+4\sqrt{5}\right)=\left(9a_k+20b_k\right)+\left(4a_k+9b_k\right)\sqrt{5}$$

ដោយ $\sqrt{5}$ ជាចំនួនអសនិទាន នាំឲ្យ: $a_{k+1}=9a_k+20b_k \quad (1); b_{k+1}=4a_k+9b_k \quad (2)$
តាម $(1)\&(2)$ យើងបាន: $a_{k+2}=9a_{k+1}+20b_{k+1}=9a_{k+1}+20(4a_k+9b_k)$

$$=9a_{k+1}+20\left(4a_k+9\frac{a_{k+1}-9a_k}{20}\right)=18a_{k+1}-a_k$$ ចំពោះ: $a_1=9, a_2=161$

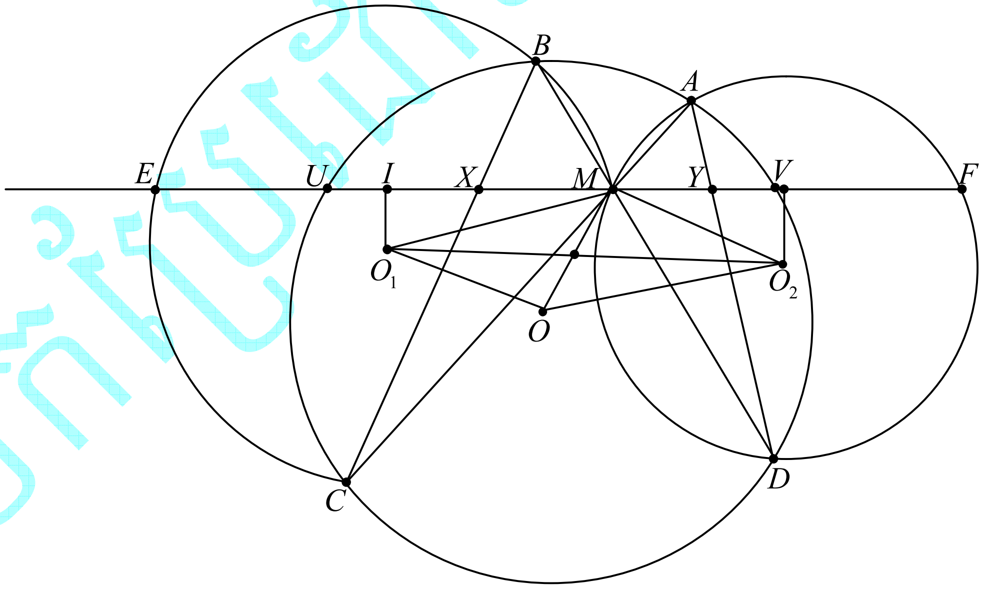
ដូចគ្នាដែរយើងបាន: $b_{k+2}=18b_{k+1}-b_k$ ចំពោះ $b_1=4, b_2=72$ ។
នេះគឺជា បណ្តាទំនាក់ទំនង truy hoi កំណត់ $\{a_k\},\{b_k\}$ ។
តាម $(1)\&(2)$ យើងបាន: $a_{k-1}=5a_k-12b_k$ ។
ដូចនេះ $a_{k-1}a_{k+1}-5b_k^2=(9a_k-20b_k)(9a_k+20b_k)-5b_k^2$

$$=81(a_k^2-5b_k^2)=81\left(a_k+\sqrt{5}b_k\right)\left(a_k-\sqrt{5}b_k\right)$$

$$=81\left(2+\sqrt{5}\right)^{2k}\left(2-\sqrt{5}\right)^{2k}=81.(-1)^{2k}=81$$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ឡើងវិញ: $a_{k-1}a_{k+1}-5b_k^2=81$ ចំពោះគ្រប់ $k\geq 2$ ។

៣. ពិនិត្យច្បាប់ចំរាស់ផ្ចិត M តាមផលធៀប $k=MA.MC$
$I_M^k: A\to C, B\to D, U\to V$ នាំឲ្យ $BC\to(AMD), AD\to(BMC)$ និង $UV\to UV$ ((AMD) តាងឲ្យរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ AMD)។



ដោយ X ជាចំនុចប្រសព្វរបស់ BC និង UV នាំឲ្យ $X\to F$ (ចំពោះ: F ជាចំនុចប្រសព្វរបស់ UV នឹងរង្វង់ (AMD), ដូចគ្នាដែរ $Y\to E$ (ដែល E ជាចំនុចប្រសព្វរបស់ UV នឹងរង្វង់ (BMC))។
តាមលក្ខណ:នៃច្បាប់ចំរាស់ យើងបាន:

$$\frac{1}{MX}=MF, \frac{1}{MV}=MU, \frac{1}{MY}=ME, \frac{1}{MU}=MV$$ ។

ដូចនេះ លំហាត់ដែលត្រូវស្រាយបញ្ជាក់សមមូលនឹងការស្រាយថា:

$MF+MU=MV+ME$, គឺថាត្រូវស្រាយបញ្ជាក់ថា $EU=VF$ ។

តាង O_1,O_2 រៀងគ្នាជាផ្ចិតរង្វង់ (BMC) និង (AMD) ។

BC ជាខ្សែធ្នូរបស់រង្វង់ទាំងពីរ (O) និង (O_1) នាំឲ្យ $OO_1\perp BC$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត តាមលក្ខណៈនៃច្បាប់ចំរាស់ យើងបាន:

មុំរវាង O_2M និង BC ស្មើនឹងមុំរវាង O_2M និងរង្វង់ (AMD) (ព្រោះ O_2M មិនចល័ត តាមច្បាប់ចំរាស់នេះ)

ហើយស្មើនឹង 90^0, ដូចនេះ $O_2M\perp BC$ (2)

តាម (1) & (2) ទាញបាន $O_2M\parallel O_1O$, ដូចគ្នាដែរយើងស្រាយបានថា $OO_2\parallel MO_1$ ។

ដូចនេះ MO_2OO_1 ជាប្រលេឡូក្រាម មានផ្ចិត N ។ តាង I និង J រៀងគ្នាជាចំនោលកែងរបស់ O_1 និង O_2 ទៅលើ UV ។

ចតុកោណ O_1O_2JI ជាចតុកោណព្នាយកែង, N ជាចំនុចកណ្ដាលរបស់ O_1O_2 នាំឲ្យយើងបាន $NI=NJ$ ។

ត្រីកោណទាំងពីរ EMO និង FMO មាន IN និង JN តាមលំដាប់ជាបាតមធ្យម នោះពី $NI=NJ$ នាំឲ្យយើងបាន $OE=OF$ ។ បូករួមនឹង $OU=OV$ ទាញបាន $EU=FV$ ។

ដូចនេះ យើងបានបញ្ហាត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់។

៤. បើ $\deg P=0$, គឺថា $P(x)\equiv c$, ជំនួសចូលយើងបាន $P(x)\equiv 0$ រឺ $P(x)\equiv 1$ ជាពហុធាពីរជាចំនួនថេរផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌប្រធាន។

បើ $\deg P=m$, m ជាចំនួនសេស នាំឲ្យ $P(x)$ មានឫសមួយ $x_0\in\mathbb{R}$ មួយជានិច្ច។

តាមទំនាក់ទំនងលំហាត់យើងទាញបាន x_0^2+2 ក៏ជាឫសរបស់ $P(x)$ ។

ពិនិត្យស្វិត $u_1=x_0, u_{n-1}^2+2$

យើងមានស្វីតនេះ ជាស្វីតកើន, ហើយមាន $P(u_n)=0,\forall n\in\mathbb{N}$ ។

ដូចនេះ ពហុធា $P(x)$ មានឫសរាប់មិនអស់, មិនសមហេតុផល។

ដូចនេះ ដឺក្រេរបស់ $P(x)$ ជាចំនួនគូ។ តាង $\deg P=n=2k, k\in\mathbb{N}^*$ ។

យើងសរសេរឡើងវិញ: $P(x)=a_{2n}x^{2n}+...+a_1x+a_0$ ។

ផ្ទឹមមេគុណរបស់ x^{4n} នៅអង្គសងខាងសមីការអនុគមន៍យើងបាន: $a_{2n}^2=a_{2n}\Rightarrow a_{2n}=1$.

តាង $P(x)=(x^2-x+2)^n+G(x), \deg G<2n$ ។

ដោយផ្អែកទៅលើសមភាព $(x^2-x+2)(x^2+x+2)=(x^2+2)^2-(x^2+2)+2$

យើងមាន: $P(x).P(x+1)=P(x^2+2)$

$\Leftrightarrow \left[G(x)+(x^2-x+2)^n\right]\left[G(x+1)+(x^2+x+2)^n\right]=G(x^2+2)+\left[(x^2+2)-(x^2+2)+2\right]^n$

$\Leftrightarrow G(x).G(x+1)+G(x).G(x^2+x+2)^n+G(x+1).(x^2-x+1)^n=G(x^2+2)$ ។

ដោយ $\deg G=k<2n$ នាំឲ្យយើងសង្កេតឃើញថា ដឺក្រេរបស់អង្គខាងឆ្វេងរបស់សមភាពខាងលើគឺ $2n+k$, ក្នុងពេលដែលដឺក្រេរបស់អង្គខាងស្ដាំគឺ $2k$, តែ $2n+k>2k$ ។

ដូចនោះ ត្រូវមាន $G(x)\equiv 0$ ។

ពីនោះ យើងរកបាន $P(x)=(x^2-x+2)^n$ ។

ដូចនេះ យើងបាន $P(x)\equiv 0$ រឺ $P(x)=(x^2-x+2)^n$ ។

៥. ការសង្កេតដំបូងគឺ $a\ge 0$ ព្រោះចំពោះ $a<0$ នោះពេល $n\to+\infty$ នាំឲ្យ $2^na+b\to-\infty$ ហើយមិនអាចជា

ចំនួនការេប្រាកដ។

ពិនិត្យ $a>0$ ដោយ $2^n a+b$ ជាចំនួនការេប្រាកដចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ នាំឲ្យចំនួន $2^{n+2}a+b$ ក៏ជាចំនួនការេប្រាកដដែរ, គឺថា: $2^{n+2}a+b=x^2,\quad x\in\mathbb{Z}^+\quad (1)$

ម្យ៉ាងទៀត, ដោយ $2^n a+b$ ជាចំនួនការេប្រាកដនាំឲ្យ $4(2^n a+b)$ ក៏ជាចំនួនការេប្រាកដដែរ, គឺថា:

$$2^{n+2}a+4b=y^2,\ y\in\mathbb{Z}^+\quad (2).$$

តាម $(1)\&(2)$ យើងបាន: $3b=y^2-x^2\Rightarrow y^2=x^2+3b$ ។

បើ $b>0$ ដោយ $a>0$ និង n ធំល្មម នោះតាម (1) យើងទទួលបាន $x>\frac{3}{2}b$ ។

ដូចនេះ $(x+1)^2=x^2+2x+1>x^2+3b=y^2>x^2$

ករណីនេះមិនសមហេតុផល។ បើ $b<0$, បកស្រាយដូចគ្នាយើងបាន $(x-1)^2<y^2<x^2$, មិនសមហេតុផល។ ដូចនេះ $b=0$, ដោយការឲ្យ $n=0, n=1$ យើងបាន a និង $2a$ សុទ្ធតែជាចំនួនការេប្រាកដ នាំឲ្យ $a=0$ ។

៦. តាង S_n ជាចំនួនបណ្តាចំលាស់ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌប្រធាន។

$i)$ ចំនួនបណ្តាចំលាស់ដែល $a_n=n$ គឺ S_{n-1} ។

$ii)$ ចំនួនបណ្តាចំលាស់ដែល $a_i=n\,(1\le i\le n-1)$ គឺ C_{n-1}^{i-1}

ឲ្យ i រត់ពី 1 ដល់ $n-1$ យើងបាន: $S_n=S_{n-1}+\sum_{i=1}^{n-1}C_{n-1}^{i-1}=S_{n-1}+2^{n-1}-1$ ។

ឃើញថា $S_2=1$ ។

ពីនោះយើងបាន $S_n=2^n-n-1$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

វិញ្ញាសាស្នើទី២០

១. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម: $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt[4]{32-x}-y^2=-3\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt{32-x}+6y=24\end{cases}\quad (x,y\in\mathbb{R})$

២. គេឲ្យស្វ៊ីត $\{u_n\}; n=0;1;2;...$

កំណត់ដោយ: $\begin{cases}u_0=a\\ u_{n+1}=u_n+\cos u_n\end{cases}$ ចំពោះ $n=0;1;2;...$

រក $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ ។

៣. គេឲ្យរង្វង់ (C) មានផ្ចិត I កាំ R និងចំនុច O នៅនឹងយ៉ាងណាឲ្យ $OI=2R$ ។ តាង $(C_1),(C_2)$ ជារង្វង់ពីរប្រែប្រួលកាត់តាម O, ប៉ះនឹង (C) ហើយប្រសព្វ នឹងគ្នា។ M ជាចំនុចប្រសព្វទីពីររបស់ $(C_1),(C_2)$ ។ រកសំនុំចំនុច M ។

៤. រកគ្រប់អនុគមន៍ជាប់ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម:

$f(1)=-1$ និង $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$, ចំពោះគ្រប់ x,y ស្ថិតក្នុង $\mathbb{R}$ ។

៥. គេឲ្យ n,d ជាបណ្តាចំនួនគត់វិជ្ជមាន យ៉ាងណាឲ្យ d ចែកដាច់នឹង $2n^2$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា n^2+d មិនអាចជាចំនួនការេប្រាកដទេ។

៦. តើមានចំនួនគត់ធម្មជាតិដែលមានលេខ 10 ខ្ទង់ខុសគ្នាពីមួយទៅមួយចំនួនប៉ុន្មាន, ក្នុងនោះបណ្តាលេខ

$1, 2, 3, 4, 5$ ត្រូវបានរៀបតាមលំដាប់កើនពីឆ្វេងទៅស្តាំ តែបណ្តាលេខ $1, 2, 3, 4, 5, 6$ គឺមិនត្រូវបានរៀបដូចនេះទេ។

ចំលើយ

១. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម: $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt[4]{32-x}-y^2=-3 & (1) \\ \sqrt[4]{x}+\sqrt{32-x}+6y=24 & (2) \end{cases}$

លក្ខខណ្ឌ: $0 \le x \le 32$

បូកសមីការទាំងពីររបស់ប្រព័ន្ធយើងបាន:

$$\sqrt{x}+\sqrt{32-x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{32-x}=y^2-6y+21=(y-3)^2+12 \quad (3)$$

យើងមាន: អង្គខាងស្តាំរបស់សមីការ $(3) \ge 12 \quad (4)$

អនុវត្តន៍វិសមភាព *Bunyakovski*, យើងបាន: $\sqrt{x}+\sqrt{32-x} \le \sqrt{2(x+32-x)}=8$

និង $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{32-x} \le \sqrt{2\left(\sqrt{x}+\sqrt{32-x}\right)} \le 4$

ទាញបាន អង្គខាងឆ្វេងរបស់សមីការ $(3) \le 12 \quad (5)$

តាម $(4) \& (5)$ ទាញបាន $(3) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=\sqrt{32-x} \\ y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=16 \\ y=3 \end{cases}$

ជំនួសចូលប្រព័ន្ធឃើញថាផ្ទៀងផ្ទាត់។

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធមានចំលើយតែមួយគត់: $(x;y)=(16;3)$ ។

២. យើងពិនិត្យពីរករណីខាងក្រោម:

ករណីទី១: $a=\frac{\pi}{2}+k\pi \ (k\in\mathbb{Z})$ ។ ពេលនោះ តាមរូបមន្តកំណត់ស្វ៊ីត, យើងបាន:

$$u_1=a+\cos a=\frac{\pi}{2}+k\pi+\cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi .$$

ដោយប្រើវិចារអនុមានរួម យើងស្រាយបាន $u_n=\frac{\pi}{2}+k\pi, \forall n=0;1;2;\ldots$

ដូចនោះ, $\lim u_n=\frac{\pi}{2}+k\pi$

ករណីទី២: $a\ne\frac{\pi}{2}+k\pi \ (k\in\mathbb{Z})$

ពិនិត្យអនុគមន៍ $f(x)=x+\cos x$

យើងបាន $f'(x)=1-\sin x\ge 0, \forall x\in\mathbb{R}$ ។ ទាញបានអនុគមន៍ $f(x)$ កើននៅលើ $\mathbb{R}$ ។

ស្វ៊ីតត្រូវបានសរសេរឡើងវិញដូចខាងក្រោម: $\begin{cases} u_0=a \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$ ចំពោះ $n=0;1;2;\ldots$ ។

$+$ បើ $-\frac{\pi}{2}+k2\pi<\alpha<\frac{\pi}{2}+k2\pi \ (k\in\mathbb{Z})$ ។ ពេលនោះ, $\cos a>0$ ។

យើងមាន: $u_0=a;$

$$u_1=a+\cos a>a=u_0 \Rightarrow u_1>u_0 \Rightarrow f(u_1)>f(u_0) \Rightarrow u_2>u_1\ldots$$

បន្តដំណើរការខាងលើយើងបាន: $u_0<u_1<u_2<u_3<\ldots$ ទាញបានស្វ៊ីត $\{u_n\}$ ជាស្វ៊ីតកើន។

យើងស្រាយបញ្ជាក់ដោយវិចារអនុមានរួម: $-\frac{\pi}{2}+k2\pi<u_n<\frac{\pi}{2}+k2\pi, \forall n=0;1;2;...$ (1)

យើងមាន: $-\frac{\pi}{2}+k2\pi<u_0=a<\frac{\pi}{2}+k2\pi$

ឧបមាថា (1) ពិតចំពោះ $n=m$ គឺថាយើងបាន: $-\frac{\pi}{2}+k2\pi<u_m<\frac{\pi}{2}+k2\pi$

$\Rightarrow f\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)<f(u_m)<f\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)$

$\Rightarrow -\frac{\pi}{2}+k2\pi+\cos\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)<u_{m+1}<\frac{\pi}{2}+k2\pi+\cos\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)$

$\Rightarrow -\frac{\pi}{2}+k2\pi<u_{m+1}<\frac{\pi}{2}+k2\pi$

ដូចនេះ (1) ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់។ ដោយ $\{u_n\}$ ជាស្វ៊ីតកើន និងទាល់លើនាំឲ្យមានលីមីត។

តាង $\lim u_n=l$ ។ ពេលនោះ: $-\frac{\pi}{2}+k2\pi<l\le\frac{\pi}{2}+k2\pi$ ។

តាមរបៀបកំណត់ស្វ៊ីត យើងទាញបាន: $l=l+\cos l\Rightarrow l=0\Rightarrow l=\frac{\pi}{2}+k2\pi$

+ បើ $\frac{-3\pi}{2}+k2\pi<a\frac{-\pi}{2}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

ពេលនោះ, $\cos a<0$ ។ បកស្រាយដូចករណីខាងលើយើងស្រាយបានថា ស្វ៊ីតនេះជាស្វ៊ីតចុះ និងទាល់ក្រោម។ ពេលនោះមានលីមីត $\lim u_n=l$ ។

បកស្រាយដូចគ្នា យើងបាន: $l=\frac{-3\pi}{2}+k2\pi$ ។

ដូចនេះ យើងបាន $\lim u_n=\begin{cases}\frac{\pi}{2}+k\pi & if\quad a=\frac{\pi}{2}+k\pi\quad (k\in\mathbb{Z})\\ \frac{\pi}{2}+k2\pi & if\quad -\frac{\pi}{2}+k2\pi<a<\frac{\pi}{2}+k2\pi\quad (k\in\mathbb{Z})\\ \frac{-3\pi}{2}+k2\pi & if\quad \frac{-3\pi}{2}+k2\pi<a<\frac{-\pi}{2}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$

៣. ពិនិត្យច្បាប់ចំរាស់ f តាមប៉ូល O Phuong Tich $k=P_{O/(C)}=OI^2-R^2=3R^2$, បំលែងរង្វង់ (C) ទៅជារង្វង់ (C) ។

តាង P,Q ជាចំនុចប៉ះរបស់ $(C_1),(C_2)$ និង (C) ។ ពេលនោះយើងបាន:

ច្បាប់ចំរាស់ f តាមប៉ូល O Phuong Tich k បំលែង P,Q ទៅជា P',Q' ។

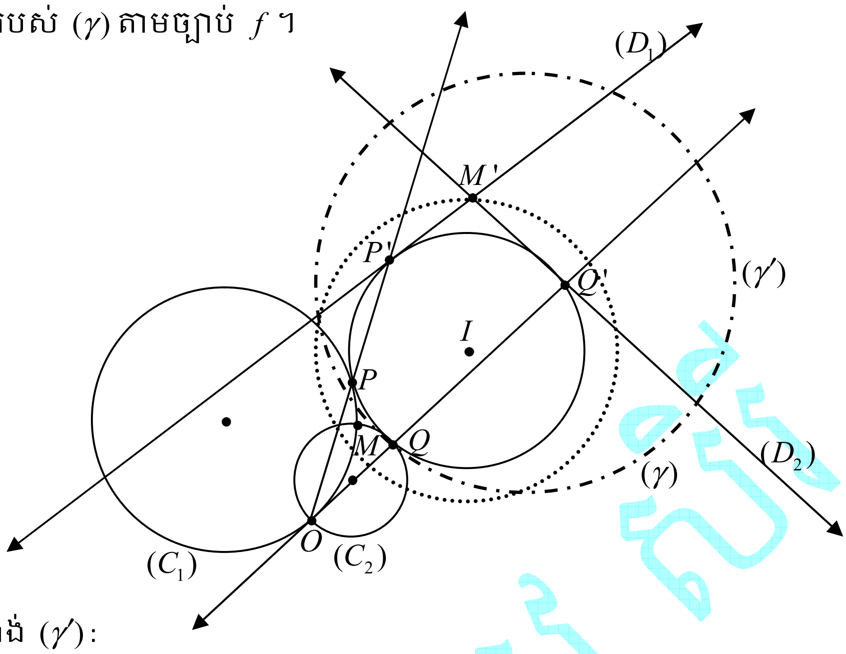
ច្បាប់ចំរាស់ f តាមប៉ូល O Phuong Tich k បំលែង $(C_1),(C_2)$ រៀងគ្នាទៅជាបន្ទាត់ពីរ $(d_1),(d_2)$ តាមលំដាប់ ជាបន្ទាត់ប៉ះរបស់ (C) ត្រង់ P',Q' ។

ដោយ $(C_1),(C_2)$ ប្រសព្វគ្នានាំឲ្យ $(d_1),(d_2)$ ក៏ប្រសព្វនឹងគ្នាត្រង់ M'(M' ជារូបភាពរបស់ M តាមច្បាប់ f)។

យើងបាន $IP'M'Q'$ ជាការេមានជ្រុង R នាំឲ្យ $IM'=R\sqrt{2}$, ដូចនោះយើងបាន M' ស្ថិតនៅលើរង្វង់ (γ) ផ្ចិត I, កាំស្មើ $R\sqrt{2}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត M ជារូបភាពរបស់ M' តាម f ហើយ (γ) មិនកាត់តាម O នាំឲ្យយើងបាន M ស្ថិតនៅលើ

រង្វង់ (γ') ជារូបភាពរបស់ (γ) តាមច្បាប់ f ។



កំណត់ផ្ចិត និងកាំរង្វង់ (γ'):

តាង N ជាចំនុចប្រសព្វរបស់ OM' និង (γ) យើងបាន:

$$P_{O/(\gamma)} = \overline{ON}.\overline{OM'} = OI^2 - \left(R\sqrt{2}\right)^2 = 2R^2$$

ហើយយើងមាន: $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = 3R^2$, ដូចនោះយើងបាន: $\overrightarrow{OM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{ON}$

តាមនោះយើងបាន (γ') ជារូបភាពរបស់ (γ) តាមច្បាប់បំលែងចាំងផ្ចិត O តាមផលធៀប $\frac{3}{2}$ ។

ដូចនេះ សំនុំចំនុច M ជារង្វង់មានផ្ចិត J, កាំស្មើ $\frac{3R}{\sqrt{2}}$ ចំពោះ $\overrightarrow{OJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OI}$ ។

៤. ឲ្យ $y=0$ យើងបាន $f(x) = f(x) + f(0)$, ទាញបាន $f(0)=0$ ។

សរសេរទំនាក់ទំនងក្រោមរាង: $f(x+y)-(x+y)^2-2(x+y) = f(x)-x^2-2x+f(y)-y^2-2y$ ។

តាង $g(x) = f(x)-x^2-2x$,ទាញបាន $g(x)$ ជាប់នៅលើ $\mathbb{R}$ ។

យើងមាន: $g(1) = f(1)-3 = -4$ និង $g(x+y) = g(x)+g(y)$,ចំពោះគ្រប់ x, y ស្ថិតក្នុង $\mathbb{R}$ ។

ដោយ $g(x)$ មានលក្ខណៈបូក នាំឲ្យមានរាង $g(x) = kx$ ។

ដោយ $g(1) = -4$ នាំឲ្យ $k=-4$ ។ ទាញបាន $g(x) = -4x$ ។

ទាញបាន $f(x) = x^2-2x$, ចំពោះគ្រប់ x ស្ថិតក្នុង $\mathbb{R}$ ។

ផ្ទៀងផ្ទាត់ឡើងវិញ ឃើញថាពិត។

៥. តាង $2n^2 = dk$, ឧបមាថា មានចំនួនគត់ m ដើម្បីឲ្យ $m^2 = n^2 + d$,

ទាញបាន $m^2k^2 = n^2k^2 + 2n^2k = n^2(k^2+2k)$

ដូចនោះ $\left(\frac{mk}{n}\right)^2 = k^2+2k$ ជាចំនួនគត់។

ដូចនេះ $\frac{mk}{n}$ ជាចំនួនគត់។ ទាញបាន k^2+2k ជាចំនួនការេប្រាកដ។

ករណីនេះ មិនអាចកើតមាន, ព្រោះ k^2+2k ស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះពីរចំនួន k^2 និង $(k+1)^2$

យើងបាន បញ្ហាត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់។

៦. តាងចំនួនគត់ធម្មជាតិមានលេខ 10 ខ្ទង់ដោយ $\overline{a_1a_2\ldots a_0}$ (a_1 ខុសពី 0)
តាមសំណើរប្រធាន គឺបណ្តាលេខ $1,2,3,4$ និង 6 ត្រូវស្ថិតនៅខាងមុខលេខ 5 នាំឲ្យលេខ 5 អាចស្ថិតនៅត្រង់បណ្តាទីតាំង a_6,a_7,a_8,a_9,a_{10} ។ យើងពិនិត្យទីតាំងរបស់លេខ 5, រួចដល់ទីតាំងរបស់លេខ 6, រួចដល់ទីតាំងរបស់លេខ $(1,2,3,4)$ ហើយចុងក្រោយជាទីតាំងរបស់បណ្តាលេខដែលនៅសល់។
ករណី $a_{10}=5$
លេខ 6 មាន 9 ទីតាំង, បណ្តាលេខ $(1,2,3,4)$ មាន C_8^4 ទីតាំង ហើយបួនលេខ $0,7,8,9$ មាន $4!$ ទីតាំង, ដូចនេះ មានទាំងអស់ $9.4!$ របៀបរៀប គិតទាំងពេល $a_1=0$ ។
យើងនឹងមិនគិតបណ្តាករណី $a_1=0$ (មាន $8.C_7^4.3!$ របៀបរៀប)
ដូចនេះ, ក្នុងករណីនេះមាន $9.C_8^4.4!-8.C_7^4.3!$ ចំនួន។
ករណី $a_9=5$ យើងបាន $8.C_7^4.4!-7.C_6^4.3!$ ចំនួន។
ករណី $a_8=5$ យើងបាន $7.C_6^4.4!-6.C_5^4.3!$ ចំនួន។
ករណី $a_7=5$ យើងបាន $6.C_5^4.4!-5.C_4^4.3!$ ចំនួន។
ករណី $a_6=5$ យើងបាន $5.C_4^4.4!$ ចំនួន។
បូកបណ្តាលទ្ធផលខាងលើយើងបានចំលើយគឺមាន 22680 ចំនួន។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

វិញ្ញាសាស្នើទី២១

១. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ: $\begin{cases} x^2(y+z)^2=(3x^2+x+1)y^2z^2 \\ y^2(z+x)^2=(4y^2+y+1)z^2x^2 \\ z^2(y+x)^2=(5z^2+z+1)x^2y^2 \end{cases}$

២. គេឲ្យ a ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន, ពិនិត្យស្វ៊ីត $(x_n):\begin{cases} x_1=a \\ x_{n+1}\ge n+2.x_n-\sum\limits_{k-1}^{n-1}k.x_k \quad \forall n\ge 1\end{cases}$ ។ រក $\lim x_n$ ។

៣. គេឲ្យរង្វង់បី O,O_1,O_2 កាំ r,r_1,R ប៉ះក្រៅពីមួយទៅមួយ។ រកប្រវែងរបស់ខ្សែ AB ជាបន្ទាត់ប៉ះរួមរបស់រង្វង់ទាំងពីរ O,O_1 ត្រង់ចំនុចប៉ះ កាត់រង្វង់ O_2 ។

៤. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x):\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ:
$f(x).f(y)=f(x.y)+\frac{1}{x}+\frac{1}{y},\ \forall x,y\in\mathbb{R}^+$ ។ គណនា $f(2012)$ ។

៥. ស្រាយបញ្ជាក់ថា មានចំនួនដែលមានរាង $a_n=2^n-3\,(n\ge 2)$ ច្រើនរាប់មិនអស់ ដែលបឋមរវាងគ្នាពីមួយទៅមួយ។

៦. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ក្នុងគ្រប់ពហុមុខប៉ោង មានយ៉ាងតិចមុខពីរដែលមានចំនួនជ្រុងស្មើគ្នា។

ចំលើយ

១. $A.$ ករណីមានអញ្ញត្តិ 1 ក្នុងចំនោមអញ្ញត្តិទាំងបី x,y,z ស្មើ 0:

1. បើ $x=0$: យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ: $\begin{cases} 0=y^2z^2 \\ y^2z^2=0 \\ z^2y^2=0 \end{cases}$

ទាញបាន $y=0, z=t\in\mathbb{R}$ រឺ $z=0, y=t\in\mathbb{R}$, ក្នុងករណីនេះ ប្រព័ន្ធមានចំលើយ

$(x,y,z)\in\{(0;0;t),(0;t;0), t\in\mathbb{R}\}$ ។

2. បើ $y=0$: ដូចគ្នានឹងខាងលើយើងបានចំលើយ $(x,y,z)\in\{(t;0;0),(0;0;t), t\in\mathbb{R}\}$

3. បើ $z=0$: យើងបានចំលើយ: $(x,y,z)\in\{(t;0;0),(0;t;0), t\in\mathbb{R}\}$ ។

$B.$ ករណី $xyz\neq 0$: ចែកសមីការនីមួយៗក្នុងប្រព័ន្ធនឹង $(xyz)^2$ យើងបាន:

$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)^2=3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\\ \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}\right)^2=4+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y^2}\\ \left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}\right)=5+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}\end{cases}$$

តាង $x_0=\dfrac{1}{x}; y_0=\dfrac{1}{y}; z_0=\dfrac{1}{z}$, យើងបានប្រព័ន្ធខាងក្រោម:

$$\begin{cases}(z_0+y_0)^2=3+x_0+x_0^2 & (1)\\ (x_0+z_0)^2=4+y_0+y_0^2 & (2)\\ (y_0+x_0)^2=5+z_0+z_0^2 & (5)\end{cases}$$

បូកសមីការទាំងបីរបស់ប្រព័ន្ធនេះយើងបាន: $(x_0+y_0+z_0)^2=12+(x_0+y_0+z_0)$

$\Rightarrow x_0+y_0+z_0=4 \quad (4)$ រឺ $x_0+y_0+z_0=-3 \quad (5)$

$+$ តាម $(1)\&(4)$ យើងបាន: $x_0=\dfrac{13}{9}$, តាម $(2)\&(4)$ យើងបាន $y_0=\dfrac{4}{3}$, តាម $(3)\&(4)$ នោះ $z_0=\dfrac{11}{9}$ ។

$+$ ដូចគ្នាដែរ, តាម $(5)\&(1),(2),(3)$ យើងបាន $x_0=-\dfrac{6}{5}; y_0=-1; z_0=-\dfrac{4}{5}$ ។

សន្និដ្ឋាន: $(x,y,z)\in\left\{\left(\dfrac{9}{13},\dfrac{3}{4},\dfrac{9}{11}\right),\left(\dfrac{-5}{6},-1,\dfrac{-5}{4}\right),(t,0,0),(0,t,0),(0,0,t), t\in\mathbb{R}\right\}$ ។

២. $+$ យើងស្រាយបញ្ជាក់តាមវិចារអនុមានរួម: $x_{n+1}>\sum_{k=1}^{n}k.x_k; \forall n\geq 1 \quad (1)$

$+$ ពេល $n=1$, យើងបាន $x_2\geq 3.x_1>x_1=a$

$+$ ឧបមាថា (1) ពិតចំពោះ n, យើងបាន:

$$x_{n+2}\geq (n+3).x_{n+1}-\sum_{k=1}^{n}k.x_k=(n+1).x_{n+1}+2x_{n+1}-\sum_{k=1}^{n}k.x_k>(n+1).x_{n+1}+2\sum_{k=1}^{n}k.x_k-\sum_{k=1}^{n}k.x_k=\sum_{k=1}^{n+1}k.x_k$$

តាមទ្រឹស្តីបទវិចារអនុមានរួម, យើងបាន: $x_{n+1}>\sum_{k=1}^{n}k.x_k$

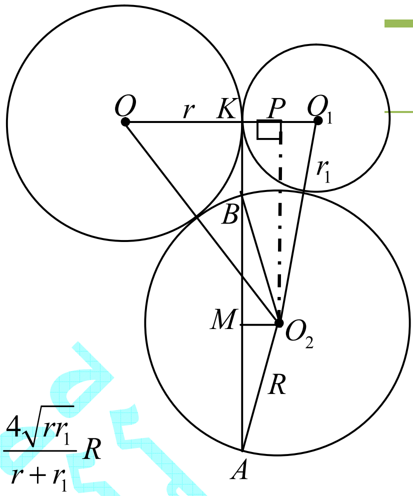
ដោយ $x_1>0$ នោះនាំឲ្យ $x_n>0, \forall n$

ឧបមាថា: $x_{n+1}>a.n!$, យើងបាន $x_{n+2}>(n+1).x_{n+1}>(n+1).a.n!=(n+1)!.a$

ដូចនេះ $x_{n+1}>a.n!\ \forall n\in\mathbb{Z}^+$, និង $\lim a.n!=+\infty$ នាំឲ្យ $\lim x_n=+\infty$ ។

៣. តាង K ជាចំនុចប៉ះរបស់រង្វង់ពីរដែលមានកាំ r និង r_1 និងផ្ចិត O, O_1 ។

តាង P ជាជើងកំពស់ដែលទំលាក់ពី O_2 របស់រង្វង់ទីបីទៅលើ OO_1



តាង $KP=x$ ។ តាមត្រីកោណកែង O_2MB យើងមាន:

$$BM^2=\frac{AB^2}{4}=O_2B^2-O_2M^2=R^2-x^2\Rightarrow AB^2=4(R^2-x^2)\quad (1)$$

គណនា O_2P ពីត្រីកោណកែងពីរ O_2PO និង O_2PO_1 យើងបាន:

$$O_2P^2=O_2O^2-OP^2=O_2O_1^2-O_1P^2$$

រឺ $(R+r)^2-(r+x)^2=(R+r_1)^2-(r_1-x)^2$

សំរួលសមភាពខាងលើយើងបាន $x=\frac{r-r_1}{r+r_1}R$ ។

ជំនួសតំលៃរបស់ x នេះចូលក្នុង (1) យើងបាន: $AB^2=\frac{16rr_1R^2}{(r+r_1)^2}$ រឺ $AB=\frac{4\sqrt{rr_1}}{r+r_1}R$

៤. ជំនួស $y=1$, យើងបាន: $f(x).f(1)=f(x)+\frac{1}{x}+1\quad (*)$

ក្នុង (*) ជំនួស $x=1$, ទាញបាន $f^2(1)-f(1)-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(1)=-1\\ f(1)=2\end{array}\right.$

ដោយ $f(x)>0$ នាំឲ្យ $f(1)=2$

ជំនួស $f(1)=2$ ចូល (*), យើងបាន: $2f(x)=f(x)+\frac{1}{x}+1\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x+1}$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ឡើងវិញ: $f(x).f(y)=\left(\frac{1}{x}+1\right).\left(\frac{1}{y}+1\right)=\frac{1}{xy}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+1=f(x.y)+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ (ពិត)

ដូចនេះ: $f(2012)=\frac{1}{2012}+1=\frac{2013}{2012}$ ។

៥. ឧបមាថា មាន k ចំនួន ដែលបឋមរវាងគ្នាពីមួយទៅមួយ:

$a_1=2^{n_1}-3, a_2=2^{n_2}-3, ..., a_k=2^{n_k}-3$, ក្នុងនោះ $2=n_1<n_2<...<n_k$ ។

យើងរកបានចំនួន: $a_{k+1}=2^{n_{k+1}}-3$ បឋមនឹងគ្រប់ k ចំនួនខាងលើ។

តាង $m=a_1.a_2...a_k\Rightarrow$ ក្នុង $(m+1)$ ចំនួន $2^0, 2^1, ..., 2^m$ មានពីរចំនួន 2^r និង 2^s ដែលមានផលដករបស់ពួកវាចែកដាច់នឹង m ។

$2^r-2^s=2^s(2^{r-s}-1)\,\vdots\, m\ (r>s)$

$(2,m)=1\Rightarrow 2^{r-s}-1\,\vdots\, m$ រឺ $2^{r-s}=mt$ ។

យើងយក $a_{k+1}=2^{r-s+2}-3(=4mt+1>a_k)$

$\Rightarrow(a_{k+1},m)=1\Rightarrow a_{k+1}$ បឋមនឹង $a_1, a_2, ..., a_k$ ។

បន្តការធ្វើដូចខាងលើ, យើងបានចំនួនដែលមានរាង 2^n-3 ច្រើនរាប់មិនអស់ ដែលបឋមរវាងគ្នា។

៦. តាង M ជាមុខដែលមានចំនួនជ្រុងច្រើនបំផុតរបស់ពហុមុខនោះ។ ឧបមាថា មុខ M មាន k ជ្រុង។ ពេលនោះ ដោយមាន k មុខ ដែលមានជ្រុងរួមគ្នានឹង M, នោះពហុមុខមានយ៉ាងតិច $k+1$ មុខ។ ដោយ M ជាមុខដែលមានជ្រុងច្រើនបំផុតស្មើ k, នាំឲ្យគ្រប់មុខទាំងអស់របស់ពហុមុខ មានចំនួនជ្រុងយកតំលៃមួយក្នុងបណ្តាតំលៃ $\{3,4,...,k\}$ ។ ពហុមុខដែលមានយ៉ាងតិច $k+1$ មុខ ចំនួនជ្រុងរបស់វាយកតំលៃក្នុង $k-2$ តំលៃ។ ដូចនោះ តាមទ្រឹស្តីបទ *Dirichlet* ទាញបាន មានយ៉ាងតិចមុខពីរ របស់ពហុមុខនោះមានចំនួនជ្រុងស្មើគ្នា។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

វិញ្ញាសាស្នើទី២២

១. ដោះស្រាយសមីការ $\log_2 x = \log_{5-x} 3$ ។

២. $a)$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា, ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n នីមួយៗ គឺសមីការ: $2012^x\left(x^2-n^2\right)=1$ មានឫសជាចំនួនវិជ្ជមានតែមួយគត់។ តាងឫសនោះដោយ x_n ។

$b)$ រក $\lim\left(x_{n+1}-x_n\right)$ ។

៣. គេឲ្យចតុកោណប៉ោង $ABCD$ មានបណ្តាគូជ្រុងដែលឈមគ្នាមិនស្របគ្នា។ តាង M ជាចំនុចប្រសព្វរបស់ AB និង CD (B ស្ថិតនៅលើអង្កត់ AM), N ជាចំនុចប្រសព្វរបស់ AD និង BC (D ស្ថិតនៅលើអង្កត់ AN)។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា: រង្វង់ទាំង 4 ដែលចារឹកក្រៅត្រីកោណទាំង 4 គឺ MBC, NCD, MAD, NAB មានចំនុចរួមគ្នាមួយតាងដោយ M_G ។

ជាងនេះទៅទៀត, បើចតុកោណ $ABCD$ ចារឹកក្នុងរង្វង់ $(O;R)$ នោះ M_G ស្ថិតនៅលើអង្កត់ទ្រូង MN និង $OM_G \perp MN$ ។

៤. រកគ្រប់បណ្តាអនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ:

$$f(x^2)-f(y^2)=(x+y)\left[f(x)-f(y)\right],\ \forall x,y\in\mathbb{R}\text{ ។}$$

៥. គេឲ្យ $a_1,a_2,...,a_n$ ជា n ចំនួនសនិទាន $(n\in\mathbb{Z}^+)$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន m, $a_1^m+a_2^m+...+a_n^m$ ជាចំនួនគត់ នោះ $a_1,a_2,...,a_n$ ជា n ចំនួនគត់។

៦. គេឲ្យ 2012 ចំនុច ស្ថិតនៅលើប្លង់យ៉ាងណាឲ្យ ក្នុង 4 ចំនុចណាក៏ដោយ ក្នុងចំនោមចំនួនដែលឲ្យ គឺមាន 3 ចំនុចរត់ត្រង់ជួរគ្នា។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា មានយ៉ាងតិច 2011 ចំនុចក្នុង 2012 ចំនុចខាងលើ ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ។

ចំលើយ

១. លក្ខខណ្ឌ: $x\in(0;5)\setminus\{4\}$ ។

តាង $t=\log_2 x$ ។ យើងឃើញថា $x=1$ មិនមែនជាឫសរបស់សមីការនាំឲ្យ $t\neq 0$ ។

យើងបាន $x=2^t$ និង $\log_{5-x}3=t\Leftrightarrow \log_3(5-x)=\dfrac{1}{t}\Leftrightarrow 3^{\frac{1}{t}}=5-x\Leftrightarrow 3^{\frac{1}{t}}+2^t-5=0 \quad (1)$

យើងឃើញថា, បើ $t<0$ នាំឲ្យអង្គខាងឆ្វេង $(1)<-3<0$ ។ ដូចនោះ:, $t>0$ ។

ពិនិត្យអនុគមន៍: $f(t)=3^{\frac{1}{t}}+2^t-5$, ចំពោះ $t>0$ ។

យើងបាន: $f'(t)=-\dfrac{1}{t^2}.3^{\frac{1}{t}}.\ln 3+2^t\ln 2$

$$f''(t)=\frac{1}{t^4}.3^{\frac{1}{t}}.\ln^2 3+\frac{2}{t^3}.3^{\frac{1}{t}}.\ln 3+2^t\ln^2 2>0\ \ \forall t>0\text{ ។}$$

ដោយ $f'(t)$ ជាអនុគមន៍ជាប់នៅលើ $(0;+\infty)$ នាំឲ្យសមីការ $f'(t)=0$ មានច្រើនបំផុតឫស 1 មួយស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះ $(0;+\infty)$ ។ ដូចនេះ, ដោយ $f(t)$ ជាអនុគមន៍ជាប់នៅលើ $(0;+\infty)$ នាំឲ្យសមីការ $f(t)=0$ មានច្រើនបំផុតឫសពីរស្ថិតនៅលើ $(0;+\infty)$ ។

ឃើញថា $t=1$ និង $t=\log_2 3$ ជាឫសទាំងពីររបស់សមីការ $f(t)=0$ នៅលើ $(0;+\infty)$, ដូចនោះ ពួកវាគឺជាឫសទាំងពីររបស់សមីការ $f(t)=0$ ។

ទាញបាន, សមីការដែលឲ្យមានឫសពីរ $x=2$ និង $x=3$ ។

២. $a)$ ចំពោះ $n\in\mathbb{Z}^+$ នីមួយៗ, ពិនិត្យ $f_n(x)=\dfrac{1}{2012^x}-x^2+n^2$, ចំពោះ $x\in\mathbb{R}^+$ ។

យើងមាន: $f'_n(x)=\dfrac{-\ln 2012}{2012^x}-2x<0,\ \forall x>0$

ដូចនោះ, $f_n(x)$ ចុះនៅលើ $(0;+\infty)$ ។

យើងបាន: $f_n(x)=\dfrac{1}{2012^x}>0$ និង $f_n(n+1)=\dfrac{1}{2012^{n+1}}-2n-1<0$ ។

ដូចនោះ, សមីការ $f_n(x)=0$ មានឫសជាចំនួនវិជ្ជមានតែមួយគត់ $x_n\in(n;n+1)$

ទាញបាន, សមីការ: $2012^x\left(x^2-n^2\right)=1$ មានឫសជាចំនួនវិជ្ជមានតែមួយគត់ $x_n\in(n;n+1)$ ។

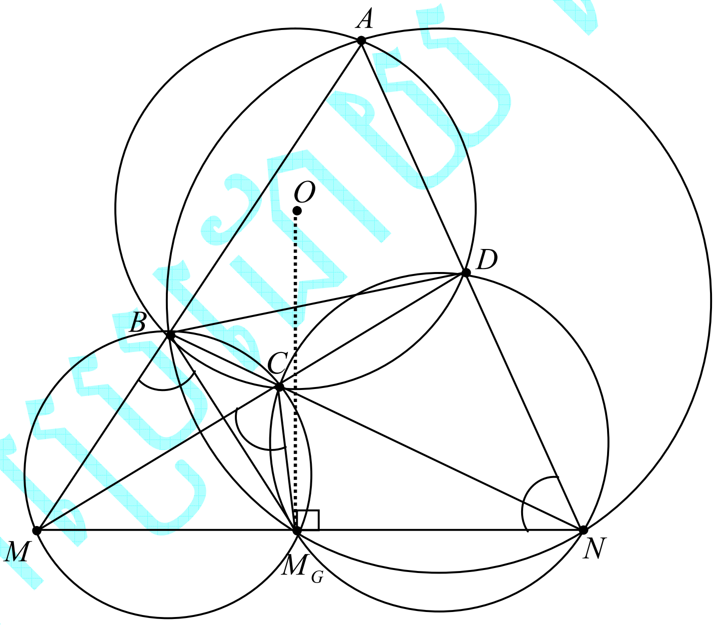
$b)$ ចំពោះ $n\in\mathbb{Z}^+$ នីមួយៗ, យើងបាន: $x_n>n$ និង $x_n^2-n^2=\dfrac{1}{2012^n}$ ។

ទាញបាន: $0<x_n-n=\dfrac{1}{(x_n+n)2012^n}<\dfrac{1}{2n.2012^n}$ ។

ដោយ $\lim\dfrac{1}{2n.2012^n}=0$ នាំឲ្យ $\lim(x_n-n)=0$ ។

ដូចនោះ, $\lim(x_{n+1}-x_n)=\lim\left\{\left[x_{n+1}-(n+1)\right]-(x_n-n)+1\right\}=0+0+1=1$ ។

៣.



$a)$ តាង M_G ជាចំនុចប្រសព្វរបស់ (MBC) និង (NCD) ។ យើងស្រាយបញ្ជាក់ថា M_G ស្ថិតនៅលើ (NAB) ។

ពិតជាដូចនេះ, ព្រោះ C ស្ថិតនៅក្នុង ΔAMN នាំឲ្យ M_G ស្ថិតនៅលើបណ្តាធ្នូ MC និង NC មិនមានផ្ទុកកំពូល B និង D របស់រង្វង់ទាំងពីរ។

យើងបាន: $\widehat{ANM_G}=\widehat{MCM_G}=\widehat{MBM_G}$ ហើយចតុកោណ ABM_GN ជាចតុកោណប៉ោងនាំឲ្យ ABM_GN ជាចតុកោណចារឹកក្នុង។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា M_G ស្ថិតនៅលើ (MAD) គឺស្រាយដូចគ្នានឹងខាងលើដែរ។

$b)$ យើងមាន: $ABCD$ ចារឹកក្នុង នាំឲ្យ $\widehat{ABC}+\widehat{ADC}=180^0$ ។

ដោយ $\widehat{ABC}=\widehat{CM_GM}$, $\widehat{ADC}=\widehat{CM_GN}$ ។ ដូចនោះ, $\widehat{CM_GN}+\widehat{CM_GN}=180^0$ ។

ដូចនោះ, M, M_G, N រត់ត្រង់ជួរ ហើយ M_G ស្ថិតនៅលើអង្កត់ MN ។

ជាងនេះទៅទៀត, យើងមាន:

$$MM_G^2-NM_G^2=\left(\overline{MM_G}+\overline{M_GN}\right)\left(\overline{MM_G}-\overline{M_GN}\right)=\overline{MN}\left(\overline{MM_G}-\overline{M_GN}\right)$$

$$=\overline{MN}.\overline{MM_G}-\overline{MN}.\overline{M_GN}=\overline{MC}.\overline{MD}-\overline{NM}.\overline{NM_G}=\overline{MC}.\overline{MD}-\overline{NC}.\overline{NB}$$

$$=\left(MO^2-R^2\right)-\left(NO^2-R^2\right)=MO^2-NO^2 \text{ ។}$$

ទាញបាន $OM_G\perp MN$ ។

៤. ឲ្យ $y=0$ យើងបាន: $f(x^2)-f(0)=x\left[f(x)-f(0)\right]\Leftrightarrow f(x^2)=f(0)+x\left[f(x)-f(0)\right]$ (1)

ដូចគ្នាដែរ, ឲ្យ $x=0$ យើងបាន: $f(y^2)=f(0)-y\left[f(0)-f(y)\right]$ (2)

តាម $(1)\&(2)$ យើងបាន $f(x^2)-f(y^2)=xf(x)-yf(y)-(x-y)f(0)$ (3)

ម្យ៉ាងទៀត យើងមាន: $f(x^2)-f(y^2)=(x+y)\left[f(x)-f(y)\right]=xf(x)-yf(y)-xf(y)+yf(x)$ (4)

តាម $(3)\&(4)$ យើងបាន: $xf(y)-yf(x)=(x-y).f(0)$ (5)

តាម (5) ឲ្យ $y=1$, យើងបាន: $xf(1)-f(x)=(x-1).f(0)\Leftrightarrow f(x)=xf(1)-(x-1)f(0)$

$\Leftrightarrow f(x)=x\left[f(1)-f(0)\right]+f(0)\Leftrightarrow f(x)=ax+b$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ឡើងវិញ, យើងឃើញថាអនុគមន៍នេះគឺផ្ទៀងផ្ទាត់សំនើរប្រធាន។

៥. ដំបូង, យើងសង្កេតឃើញថា បើក្នុង n ចំនួន $a_1, a_2, ..., a_n$ មានចំនួនគត់មួយ, ឧទាហរណ៍ថា $a_1\in\mathbb{Z}$

នាំឲ្យ $a_1^m+a_2^m+...+a_n^m\in\mathbb{Z}, \forall m\in\mathbb{Z}^+\Leftrightarrow a_2^m+...+a_n^m\in\mathbb{Z}, \forall m\in\mathbb{Z}^+$ ។

ដូចនេះ, ដោយមិនធ្វើឲ្យបាត់លក្ខណៈទូទៅ យើងអាចឧបមាដោយផ្ទុយពីការពិតថា $a_1, a_2, ..., a_n$ ជា n ចំនួនសនិទាន, មិនមែនជាចំនួនគត់។

គឺថា: $a_i=\dfrac{p_i}{q_i}$, ចំពោះ $(p_i, q_i)=1, q_i>1, \forall i=\overline{1,n}$ ។

តាង $Q=$ ពហុគុណរួមតូចបំផុត $(q_1, q_2, ..., q_n)$ ។ ពេលនោះ, $a_i=\dfrac{k_i}{Q}, \ \forall i=\overline{1,n}$ ។

យក p ជាតួចែកបឋមមួយរបស់ Q ។

ពេលនោះ, $\exists i_0\in\overline{1,n}$ យ៉ាងណាឲ្យ p មិនមែនជាតួចែកនៃ k_{i_0} ។

(ព្រោះបើផ្ទុយមកវិញ $\forall i=\overline{1,n}, p\,|\,k_i$ នាំឲ្យ $a_i=\dfrac{l_i.p}{Q}=\dfrac{l_i}{Q'}, \forall i=\overline{1,n}$, ចំពោះ $Q'=\dfrac{Q}{p}<Q$, ហើយច្បាស់ណាស់ ពេលនោះ Q' ក៏ជាពហុគុណមួយរបស់បណ្តា $q_1, q_2, ..., q_n$ ករណីនេះផ្ទុយនឹងលក្ខណៈតូចបំផុតរបស់ Q)។

តាង r_i ជាសំនល់ពេលចែក k_i នឹង p ។

យើងបាន: $0\le r_i<p, \ \forall i\ne i_0$ និង $0<r_{i_0}<p$ (1)

យើងបាន: $k_i\equiv r_i \pmod p, \forall i=\overline{1,n}$

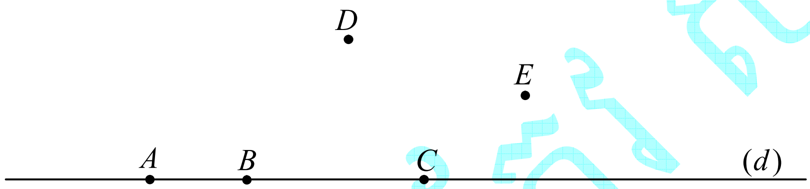
នាំឲ្យ $k_i^m\equiv r_i^m \pmod{p^m}, \ \forall i=\overline{1,n}, \forall m\in\mathbb{Z}^+$

ដូចនោះ, $\sum_{i=1}^{n} r_i^m \equiv \sum_{i=1}^{n} k_i^m = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^m\right).Q^m \equiv 0 \pmod{p^m}$ (2)

តាម (1) & (2) ទាញបាន: $p^m \le \sum_{i=1}^{n} r_i^m,\ \forall m \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow 1 \le \lim_{m\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{r_i}{p}\right)^m = 0$ (មិនសមហេតុផល)

ដូចនេះ យើងបានបញ្ហាត្រូវស្រាយបញ្ជាក់។

៦. បើគ្រប់បណ្តា 2012 ចំនុចខាងលើ សុទ្ធតែស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ នោះលំហាត់ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់។ ឧបមាថា ចំនុចទាំង 2012 ខាងលើមិនសុទ្ធតែស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយទេ។ ពេលនោះ, យើងអាចជ្រើសយកបាន 4 ចំនុច A,B,C,D ដែល 4 ចំនុចនេះមិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ។ តាមបំរាប់, ក្នុង 4 ចំនុចនេះ ត្រូវមាន 3 ចំនុចស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ,ឧបមាថាគឺបីចំនុច A,B,C ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ d តែមួយ។ ហើយចំនុច D ស្ថិតនៅលើក្រៅបន្ទាត់ d (*)។



យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់ថា 2008 ចំនុចផ្សេងទៀតសុទ្ធតែស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ d ។
ឧបមាផ្ទុយពីការពិតថា ក្នុង 2008 ចំនុចផ្សេងទៀតនោះ, មានចំនុច E ស្ថិតនៅក្រៅបន្ទាត់ d ។
ពិនិត្យ 4 ចំនុច A,B,D,E ។ តាមបំរាប់ ក្នុង 4 ចំនុចនេះ ត្រូវមាន 3 ចំនុចស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ។ ដោយ 3 ចំនុច A,B,D មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ ហើយបីចំនុច A,B,E មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ នាំឲ្យគេបានបីចំនុច A,D,E ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ រឺក៏បីចំនុច B,D,E ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ។

ករណីទី១: 3 ចំនុច A,D,E ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ។
ពេលនោះ, 3 ចំនុច B,D,E មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ ព្រោះបើ B,D,E ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ នាំឲ្យ A,B,D ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ (ផ្ទុយនឹង (*))។ ហើយ 3 ចំនុច C,D,E ក៏មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយដែរ ព្រោះបើ C,D,E ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ នាំឲ្យ A,C,D ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ (ផ្ទុយនឹង (*))។
ដូចនេះ ក្នុងបួនចំនុច B,C,D,E មិនមាន 3 ចំនុចណាស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយទេ, ផ្ទុយនឹងបំរាប់។

ករណីទី២: 3 ចំនុច B,D,E ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ។
បកស្រាយដូចខាងលើដែរ, ក្នុង 4 ចំនុច A,C,D,E មិនមាន 3 ចំនុចណាស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយទេ, គឺផ្ទុយនឹងបំរាប់ប្រធាន។
ដូចនេះ, ការឧបមាគឺខុស។ រឺអាចថា 2008 ចំនុចផ្សេងទៀតសុទ្ធតែស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ d ។
ដូចនោះ យើងបានបញ្ហាត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

វិញ្ញាសាស្នើទី២៣

១. ដោះស្រាយសមីការ: $x^3+\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}=x\sqrt{2\left(1-x^2\right)}$

២. ស្វ៊ីត (U_n) កំណត់ដោយ: $\begin{cases} u_1=a \\ u_{n+1}=u_n^2+(1-2b)u_n+b^2 \quad \forall n=1,2,... \end{cases}$

រកលក្ខខណ្ឌរបស់ a,b ដើម្បីឲ្យស្វ៊ីត (u_n) មានលីមីតកំណត់។

៣. គេឲ្យត្រីកោណ ABC មិនសមបាត, មិនកែង, ចារឹកក្នុងរង្វង់ $(O;R)$ ។ តាង M,N,P រៀងគ្នាជាចំនុចកណ្តាលរបស់បណ្តាជ្រុង BC,CA,AB ។ នៅលើកន្លះបន្ទាត់ OM គេដៅចំនុច D យ៉ាងណាឲ្យត្រីកោណ OAM មានរាងដូចគ្នានឹងត្រីកោណ ODA ។ នៅលើបណ្តាកន្លះបន្ទាត់ ON,OP តាមលំដាប់ គេឲ្យបណ្តាចំនុច E,F ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា បណ្តាបន្ទាត់ AD,BE,CF ប្រសព្វគ្នា។

៤. អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(x+2xy)=f(x)+2f(xy)\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}$ ។ គណនា $f(2012)$ ជាអនុគមន៍នៃ $f(2011)$ ។

៥. រកគ្រប់បណ្តាចំនួនគត់វិជ្ជមាន p ដើម្បីឲ្យសមីការ $x^2+y^2+1=pxy$ មានឫសជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

៦. ក្នុងការប្រឡងមួយ, មានសិស្ស 2012 នាក់មកពី 61 សាលាចូលរួម, ដែលសិស្សម្នាក់ៗធ្វើបានលំហាត់ 1 ក្នុងចំនោម 4 លំហាត់។ ដោយដឹងថា ឲ្យតែមានសិស្ស 5 នាក់ធ្វើបានលំហាត់មួយដូចគ្នា នោះគឺមានសិស្ស 2 នាក់ដែលកើតថ្ងៃតែមួយ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា មានយ៉ាងតិចសិស្ស 3 នាក់ដែលកើតថ្ងៃតែមួយ, ធ្វើបានលំហាត់មួយដូចគ្នា និងមកពីសាលាតែមួយ។

ចំលើយ

១. លក្ខខណ្ឌ $-1\le x\le 1$, តាង $x=\cos t\ \left(t\in[0;\pi]\right)$

សមីការក្លាយទៅជា $\cos^3 t+\sin^3 t=\sqrt{2}\cos t\sin t$

$$\Leftrightarrow\left(\cos t+\sin t\right)\left(1-\cos t\sin t\right)=\sqrt{2}\cos t\sin t \quad (1)$$

តាង $u=\cos t+\sin t\ \left(|u|\le\sqrt{2}\right)$

$$(1)\Leftrightarrow u^3+\sqrt{2}u^2-3u-\sqrt{2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} u=\sqrt{2} \\ u=-\sqrt{2}+1 \\ u=-\sqrt{2}-1 \end{array}\right.$$

តាមលក្ខខណ្ឌខាងលើយើងយក $u=\sqrt{2}$ និង $u=-\sqrt{2}+1$

$$u=\sqrt{2}\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$u=-\sqrt{2}+1\Rightarrow x+\sqrt{1-x^2}=1-\sqrt{2}\Rightarrow x=\frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$$

ដូចនេះ សមីការមានឫសពីរគឺ $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ x=\dfrac{1-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$

២. យើងមាន $u_{n+1}=u_n+(u_n-b)^2\Rightarrow u_{n+1}\ge u_n\ \ \forall n\in\mathbb{N}^*$

ទាញបាន ស្វ៊ីតមានលីមីតកំណត់លុះត្រាតែ វាជាស្វ៊ីតទាល់លើ។

ពេលនោះ ឧបមាថា $\lim u_n = L\ (L \in \mathbb{R})$, យើងបាន:

$$L = L^2 + (1-2b)L + b^2 \Leftrightarrow L = b.$$

បើមានលេសសន្ទស្សន៍ k ដែល $u_k > b$ នាំឲ្យ $u_n > b\ \forall n \ge k$ ផ្ទុយនឹងលទ្ធផល $\lim u_n = b$

ដូចនោះ $u_k \le b\ \forall k \in \mathbb{N}^*$ រឺ $u_n^2 - (1-2b)u_n + b^2 \le b\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Leftrightarrow b-1 \le u_n \le b\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$, ទាញបាន $b-1 \le a \le b$

ផ្ទុយមកវិញ, បើ $b-1 \le a \le b \Rightarrow b-1 \le u_1 \le b$

$\Rightarrow (u_1 - b + 1)(u_1 - b) \le 0 \Rightarrow u_1^2 + (1-2b)u_1 + b^2 - b \le 0 \Rightarrow u_2 \le b$

ហើយ $u_1 \le u_2 \Rightarrow b-1 \le u_2 \le b$

ដោយប្រើវិចារអនុមានរួម យើងស្រាយបានថា $b-1 \le u_n \le b\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

ដូចនេះ ស្វ៊ីតត្រូវបានទាល់លើដោយ b, ដូចនោះ វាមានលីមីតកំណត់។

ដូចនេះ $b-1 \le a \le b$ ជាលក្ខខណ្ឌដែលត្រូវរក។

៣. ដោយត្រីកោណ OAM មានរាងដូចគ្នានឹងត្រីកោណ ODA នាំឲ្យ $OD.OM = OA^2 = R^2$

ទាញបាន $OD.OM = OB^2 = OC^2$, ដោយ OD កែងនឹង BC ត្រង់ M នាំឲ្យត្រីកោណ OBD កែងត្រង់ B, ត្រីកោណ OCD កែងត្រង់ C

ដូចគ្នាដែរ, ត្រីកោណ OAE កែងត្រង់ A, ត្រីកោណ OCE កែងត្រង់ C, ត្រីកោណ OAF កែងត្រង់ A, ត្រីកោណ OBF កែងត្រង់ B។

ដូចនោះ F, A, E រត់ត្រង់ជួរគ្នា, E, C, D រត់ត្រង់ជួរគ្នា, ហើយ D, B, F រត់ត្រង់ជួរគ្នា។

ពិនិត្យត្រីកោណ DEF មាន $\frac{AF}{AE}.\frac{CE}{CD}.\frac{BD}{BF} = 1$ ទាញបាន AD, BE, CF រត់ត្រង់ជួរគ្នា (តាមទ្រឹស្តីបទ $Ceva$)។

៤. ឲ្យ $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

ឲ្យ $y = -1 \Rightarrow f(-1) = f(x) + 2f(-x) \Rightarrow f(-x) = -f(x)$

ឲ្យ $y = -\frac{1}{2} \Rightarrow f(0) = f(x) + 2f\left(\frac{x}{2}\right) = f(x) - 2f\left(-\frac{x}{2}\right) \Rightarrow f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right)$

ចំពោះ $x \ne 0, t \in \mathbb{R}$ ឲ្យ $y = \frac{t}{2x} \Rightarrow f(x+t) = f(x) + 2f\left(\frac{t}{2}\right) = f(x) + f(t)$

ចំពោះ $x = 0$ ជាក់ស្តែង $f(x+t) = f(x) + f(t)$

ដូចនេះ $f(x+y) = f(x) + f(y)\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(2012) = 2012 f(1) \\ f(2011) = 2011 f(1) \end{cases} \Rightarrow f(2012) = \frac{2012}{2011} f(2011)$$

៥. ពេល $p = 3$ សមីការមានឫស $x = y = 1$

ពេល $p \ne 3$, ឧបមាថាសមីការមានឫសជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហើយ (x_0, y_0) ជាឫសតូចបំផុត គឺមានន័យថា $x_0 + y_0 \le x + y$ បើ (x, y) ក៏ជាឫសរបស់សមីការ។

ដោយមិនធ្វើឲ្យបាត់លក្ខណៈទូទៅ, អាចឧបមាថា $x_0 \le y_0$។

បើ $x_0 = y_0$ នាំឲ្យ $2x_0^2 + 1 = px_0^2 \Rightarrow (p-2)x_0^2 1 \Rightarrow 1 \vdots (p-2) \Rightarrow p = 3$ (មិនសមហេតុផល)

ដូចនេះ $x_0 < y_0$, ពិនិត្យសមីការ $y^2 - px_0 y + x_0^2 + 1 = 0 \quad (1)$

(1) មានឫសគឺ y_0, តាង y_1 ជាឫសផ្សេងទៀតរបស់ (1) ។

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតយើងមាន: $\begin{cases} y_0 + y_1 = px_0 \\ y_0 y_1 = x_0^2 + 1 \end{cases}$ (2)

ពីនោះ ទាញបាន $y_1 \in \mathbb{N}^*$ ហើយ (x_0, y_1) ជាឫសរបស់សមីការដែលឲ្យ, ដូចនោះ

$x_0 + y_0 \le x_0 + y_1 \Rightarrow y_0 \le y_1$.

តាម (2) ទាញបាន $x_0^2 + 1 - px_0 = y_0 y_1 - y_0 - y_1 = (y_0 - 1)(y_1 - 1) - 1 \ge x_0^2 - 1$ (ព្រោះ $y_1 > y_0 > x_0$)

$\Rightarrow px_0 = 2 \Rightarrow p = 1$ រឺ $p = 2$

ឃើញថា $x^2 + y^2 + 1 > 2xy$ នាំឲ្យសមីការគ្មានឫសពេល $p = 1$ រឺ $p = 2$ ។

ដូចនេះ $p = 3$ ។

៦. តាមវិធាន *Dirichlet* មានយ៉ាងតិចសិស្ស $\left[\frac{2012}{61}\right] + 1 = 33$ នាក់ មកពីសាលាតែមួយ។ ក្នុង 33 នាក់នោះ , មានយ៉ាងតិច 9 នាក់ធ្វើបានលំហាត់មួយដូចគ្នា។

យើងងាយនឹងស្រាយបញ្ជាក់បានថា ចំនួនបណ្តាខែកំណើត របស់បណ្តាសិស្សមានច្រើនបំផុតស្មើ 4 ។ ពិតជាដូចនេះ, បើមានសិស្ស 5 នាក់ ដែលមានខែកំណើតខុសគ្នា នោះនឹងផ្ទុយពីបំរាប់ដែលថាមានសិស្ស 5 នាក់ដែលធ្វើបានលំហាត់មួយដូចគ្នា មានខែកំណើតដូចគ្នា។

ហើយក៏តាមវិធាន *Dirichlet*, ក្នុងសិស្ស 9 នាក់ដែលធ្វើបានលំហាត់មួយដូចគ្នា នោះបានរើសចេញពីខាងលើ គឺមានយ៉ាងតិច $\left[\frac{9}{4}\right] + 1 = 3$ នាក់ដែលមានខែកំណើតដូចគ្នា។ ហើយនោះគឺជាសិស្ស 3 នាក់ដែលមានខែកំណើតដូចគ្នា, ធ្វើបានលំហាត់មួយដូចគ្នានិង មកពីសាលាតែមួយ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

វិញ្ញាសាស៊េរីទី២៤

១. សមីការ $x^2 = 100^{\sin x}$ មានឫសប៉ុន្មានស្ថិតក្នុងចន្លោះ $[2\pi; 3\pi]$?

២. គេឲ្យស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 2011 u_n}{2012}, \ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

គណនា $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{u_i}{u_{i+1} - 1}$

៣. គេឲ្យត្រីកោណ ABC មានមុំស្រួចបី។ សង់ត្រីកោន $A'B'C'$ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC យ៉ាងណាឲ្យជ្រុង $B'C'$មានផ្ទុកកំពូល A, ជ្រុង $C'A'$មានផ្ទុកកំពូល B ហើយជ្រុង $A'B'$មានផ្ទុកកំពូល C និងផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $\widehat{BCA'} = \widehat{CAB'} = \widehat{ABC'} = \varphi$ ។ កំណត់ φ ដើម្បីឲ្យក្រឡាផ្ទៃត្រីកោន $A'B'C'$ធំបំផុត។

៤. រកគ្រប់បណ្តាអនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់និងជាប់នៅលើ $\mathbb{R}$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់:

$f(30x) + f(4x) = 2012x, \ \forall x \in \mathbb{R}$ ។

៥. រកតំលៃធំបំផុតរបស់ផលគុណនៃបណ្តាចំនួនគត់ធម្មជាតិដែលមានផលបូកស្មើ 2012 ។

៦. តើមានចំនួនគត់ធម្មជាតិដែលមានលេខ 6 ខ្ទង់ផ្សេងគ្នាចំនួនប៉ុន្មាន, ក្នុងនោះលេខនៅខ្ទង់ពីរដែលនៅក្បែរគ្នា មិនមែនជាចំនួនសេសដូចគ្នា។

ចំលើយ

១. ចំពោះ $x>0$, យើងបាន $x^2=100^{\sin x}\Leftrightarrow x=10^{\sin x}\Leftrightarrow \lg x=\sin x$

តាង $f(x)=\lg x-\sin x$ ចំពោះ $2\pi\le x\le 3\pi$

$$f'(x)=\frac{1}{x\ln 10}-\cos x$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x\cos x=\frac{1}{\ln 10}\quad (*)$$

តាង $g(x)=x\cos x$ ចំពោះ $2\pi\le x\le 3\pi$

$$g'(x)=\cos x-x\sin x$$

សមីការ $g'(x)=0$ មានឬសតែមួយគត់ក្នុងចន្លោះ $(2\pi;3\pi)$ ។

តាង x_0 ជាឬសតែមួយគត់នោះ។ យើងបាន $2\pi<x_0<\dfrac{5\pi}{2}$ (ព្រោះ $g(2\pi).g\left(\dfrac{5\pi}{2}\right)<0$)

យើងបានតារាងអថេរភាព:

x	2π		x_0		3π
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	2π	$\nearrow$		$\searrow$	-3π

ដោយ $g(2\pi)=2\pi>\dfrac{1}{\ln 10}>g(3\pi)=-3\pi$ នាំឲ្យសមីការ $(*)$ មានឬសតែមួយគត់លើចន្លោះ $(2\pi;3\pi)$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទ *Rolle* នាំឲ្យសមីការ $f(x)=0$ មានឬសមិនលើសពីពីរ លើចន្លោះ $(2\pi;3\pi)$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $f(2\pi)=\lg(2\pi)>0,\ f\left(\dfrac{5\pi}{2}\right)=\lg\left(\dfrac{5\pi}{2}\right)-1<0,\ f(3\pi)=\lg(3\pi)>0$

ដូចនេះ សមីការ $f(x)=0$ មានឬសតែពីរគត់នៅលើចន្លោះ $[2\pi;3\pi]$ ។

២. យើងមាន: $\forall n\in\mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1}=\frac{u_n(u_n-1)+2012u_n}{2012}=\frac{u_n(u_n-1)}{2012}+u_n\Rightarrow u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(u_n-1)}{2012}$$

ដោយ $u_1=2$ នាំឲ្យយើងបាន $u_1<u_2<u_3<\ldots<u_n<\ldots$ ។ ដូចនេះ ស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន។

ឧបមាថាស្វ៊ីត (u_n) ត្រូវទាល់លើ យើងទាញបានស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតរួម, មានន័យថា

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=a>2\ (a\in\mathbb{R})$

តាមបំរាប់, $u_{n+1}=\dfrac{u_n^2+2011u_n}{2012}$ ។ ឲ្យ $n\to+\infty$ យើងបាន:

$$a=\frac{a^2+2011a}{2012}\Leftrightarrow a^2-a=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=0\\ a=1\end{array}\right.$$ (ផ្ទុយពីការពិត ព្រោះ $a>2$)

ដូចនេះ ស្វ៊ីត (u_n) កើន និងមិនទាល់លើ នាំឲ្យ $\lim\limits_{n\to+\infty}=+\infty$

ម្យ៉ាងទៀត, $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(u_n-1)}{2012}\Rightarrow u_n(u_n-1)=2012(u_{n+1}-u_n)$

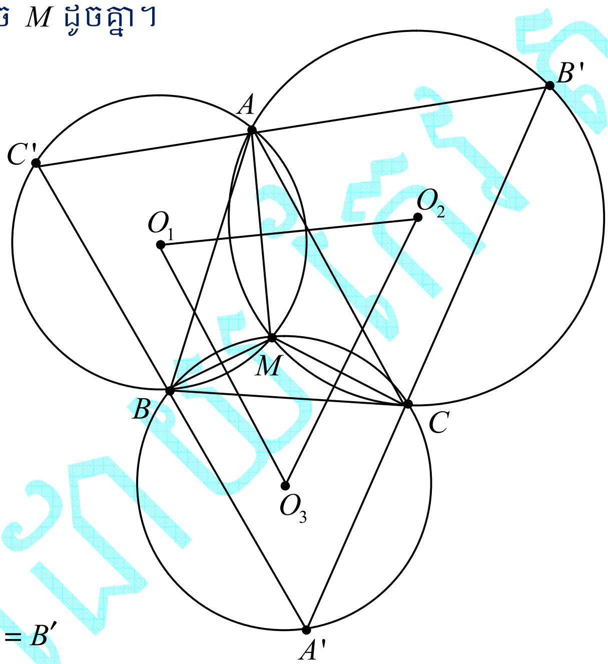
ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $(u_n-1)(u_{n+1}-1)$ យើងបាន:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}-1}=2012\frac{(u_{n+1}-1)(u_n-1)}{(u_n-1)(u_{n+1}-1)}=2012\left(\frac{1}{u_n-1}-\frac{1}{u_{n+1}-1}\right)$$

ដូចនោះ យើងបាន: $\sum_{i=1}^{n}\frac{u_i}{u_{i+1}-1}=2012\left(\frac{1}{u_1-1}-\frac{1}{u_{n+1}-1}\right)=2012\left(1-\frac{1}{u_{n+1}-1}\right)$

ទាញបាន $\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{u_i}{u_{i+1}-1}=\lim_{n\to+\infty}2012\left(1-\frac{1}{u_{n+1}-1}\right)=2012$

៣. សង់បណ្តាវង្វង់ $(O_1),(O_2),(O_3)$ ចារឹកក្រៅបណ្តាត្រីកោណ ABC', ACB', CBA' ។
បណ្តាវង្វង់នេះ កាត់តាមចំនុច M ដូចគ្នា។



យើងបាន $A=C', B=A', C=B'$

$\Rightarrow \Delta A'B'C'$ ស្វ័យដំនួចនឹងខ្លួនឯង ពេល φ ប្រែប្រួល។

បណ្តាចំនុច O_1, O_2, O_3 នៅនឹង ហើយ $\Delta O_1O_2O_3$ មានរាងដូចនឹង $\Delta A'B'C'$

ពេលនោះ យើងបាន: $\frac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta O_1O_2O_3}}=\frac{B'C'^2}{O_1O_2^2}$

ដូចនោះ ដើម្បីឲ្យក្រលាផ្ទៃ $\Delta A'B'C'$ ធំបំផុត គឺ $B'C'$ ត្រូវធំបំផុត។

ករណីនេះកើតមាន ពេល $B'C'\parallel O_1O_2$ រឺ $B'C'\perp AM$

$\widehat{MAC}=\widehat{MCB}=\widehat{MBA}=90^0-\varphi$ ។

$\tan\varphi=\cot A+\cot B+\cot C$ ។

៤. តាមបំរាប់ $f(30x)+f(4x)=2012x$

យើងឲ្យ $x=0\Rightarrow f(0)+f(0)=0\Rightarrow f(0)=0$

ជំនួស x ដោយ $\frac{x}{30}$ នោះតាមបំរាប់យើងបាន: $f(x)+f\left(\frac{2}{15}x\right)=\frac{1006}{15}x, \forall x\in\mathbb{R}$

យើងរក្សា $x\in\mathbb{R}$ ។ ពិនិត្យស្វីត $x_1 = x, x_{n+1} = g(x_n), \forall n\in\mathbb{N}^*$, ក្នុងនោះ $g(x)=\frac{2}{15}x$ ។

តាមវិចារអនុមានរួម យើងបាន $x_n = \left(\frac{2}{15}\right)^{n-1}x$, ដូចនោះស្វីត (x_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រថយចុះមិនកំណត់

មាន $x_1 = x$, រេសុង $q=\frac{2}{15}$ ។ យើងបាន $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ ។

ជំនួស x រៀងគ្នាដោយ $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ យើងបាន:

$$f(x_1)+f(x_2)=\frac{1006}{15}x_1$$

$$f(x_2)+f(x_3)=\frac{1006}{15}x_2$$

....

$$f(x_{n-1})+f(x_n)=\frac{1006}{15}x_{n-1}$$

$$\Rightarrow f(x_1)+(-1)^n f(x_n)=\frac{1006}{15}\left[x_1-x_2+x_3-x_4+...+(-1)^n x_{n-1}\right]$$

$$\Rightarrow f(x_1)+(-1)^n f(x_n)=\frac{1006}{15}\frac{x_1}{1+\frac{2}{15}}\left[1-\left(\frac{-2}{15}\right)^{n-1}\right] \quad (*)$$

យើងបាន $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ និង $f(0)=0$ ។ ដោយ f ជាអនុគមន៍ជាប់នៅលើ $\mathbb{R}$ នាំឲ្យ $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=f(0)=0$

ក្នុង $(*)$ ឲ្យ $n\to+\infty$ យើងបាន: $f(x_1)=\frac{1006}{17}x_1$ ។

ផ្ទៀងផ្ទាត់ឡើងវិញ ឃើញថាអនុគមន៍ $f(x)=\frac{1006}{17}x$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សំនើរប្រធាន។

ដូចនេះ $f(x)=\frac{1006}{17}x$ ជាអនុគមន៍ដែលត្រូវរក។

៥. ឧបមាថា យើងរកបានបណ្តាចំនួនគត់ធម្មជាតិ $k_1, k_2, ..., k_n$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\sum\limits_{i=1}^{n} k_i = 2012$ និង $\prod\limits_{i=1}^{n} k_i$ មានតំលៃធំបំផុត។

ដោយមិនធ្វើឲ្យបាត់លក្ខណ:ទូទៅ

+ បើ $k_1 = 1$: តាង $k'_2 = k_2 + 1$ យើងបាន $k'_2 + k_3 + ... + k_n = 2012$

និង $k'_2 .k_3 ...k_n = (k_2+1)k_3...k_n > k_1k_2k_3...k_n$ ។ ករណីនេះផ្ទុយនឹង $\prod\limits_{i=1}^{n} k_i$ ធំបំផុត។

ដូចនោះ $k_i > 1, \forall i = 1, 2, ..., n$ ។

+ បើ $k_1 \ge 5$: យើងបាន $2+(k_1-2)+k_2+k_3+...+k_n = 2012$ និង $2(k_1-2)=2k_1-4>k_1$

$\Rightarrow 2(k_1-2)k_2...k_n > k_1k_2k_3...k_n$ ។ ករណីនេះក៏ផ្ទុយនឹង $\prod\limits_{i=1}^{n} k_i$ ធំបំផុតដែរ។

ដូចនោះ $k_i \le 4, \ \forall i = 1, 2, 3, ..., n$ ។

ដូចនេះ $2 \le k_1, k_2, ..., k_n \le 4$ ។ ឥឡូវ, បើក្នុងបណ្តាចំនួន $k_1, k_2, ..., k_n$ មានចំនួនណាស្មើ 4 នោះយើងជំនួសវាដោយ លេខ 2 ពីរដង នោះនឹងមានផលបូកនិង ផលគុណសុទ្ធតែមិនប្រែប្រួល។ តែពេលនោះ, បើ

មានបីចំនួនស្មើនឹង 2 នោះយើងជំនួសបីចំនួននេះដោយ លេខ 3 ពីរដងនោះផលបូកនៅតែមិនប្រែប្រួល តែផលគុណ $3.3>2.2.2$ ។ ករណីនេះក៏ផ្ទុយនឹង $\prod_{i=1}^{n}k_i$ ធំបំផុតដែរ។

ដូចនេះ, ដើម្បីឲ្យ $\prod_{i=1}^{n}k_i$ ធំបំផុត នោះក្នុងបណ្តាចំនួន $k_1,k_2,...,k_n$ មានមិនលើសពីលេខ 2 ពីរដង ហើយ ចំនួនផ្សេងទៀតគឺស្មើនឹង 3 ។

យើងមាន $2012=670.3+2\Rightarrow \max\prod_{i=1}^{n}k_i=3^{670}.2$ ។

៦. តាងចំនួនដែលត្រូវរកដោយ $A=\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$

ដោយ A មានលេខ 6 ខ្ទង់ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិផ្សេងគ្នា, ក្នុងនោះពីរលេខដែលនៅក្បែរគ្នា មិនមែនជាចំនួនសេសដូចគ្នា នាំឲ្យ A អាចមានតែលេខសេស 1រឺ 2រឺ 3 ។

ករណីទី១: A មានលេខសេសចំនួន 1 លេខ

បើ a_1 សេស: A មានចំនួន $5.5.4.3.2.1=600$ ចំនួន

បើ a_1 គូ: មាន 4 របៀបរើស $a_1\left(a_1\in\{2;4;6;8\}\right)$ ។ ចំពោះរបៀបរើស a_1 នីមួយៗ, យើងមានចំនួនរបៀបក្នុងការរើស $\overline{a_2a_3a_4a_5a_6}$ ក្នុងនោះមានលេខសេសចំនួន 1 ស្មើនឹង $5.5.4.3.2=600$ ចំនួន។

ដូចនេះ មាន $4.600=2400$ ចំនួន A ចំពោះ a_1 ជាចំនួនគូ។

យើងបាន $600+2400=3000$ ចំនួន A ក្នុងករណី A មានលេខសេស 1 ។

ករណីទី២: A មានលេខសេស 2

បើ a_1 សេស: មាន 5 របៀបរើស a_1, មាន 5 របៀបរើស a_2 ។ ចំពោះរបៀបរើស a_1 និង a_2 នីមួយៗ, យើងមាន $4.4.3.2.4=384$ របៀបរើស $\overline{a_3a_4a_5a_6}$ ។ ដូចនេះមាន $5.5.384=9600$ ចំនួន A ។

បើ a_1 គូ: មាន 4 របៀបរើស a_1, មាន 6 របៀបរើស 2 ទីតាំងមិននៅជិតគ្នារបស់ពីរចំនួនសេស។

ចំពោះរបៀបរើសនីមួយៗដូចនេះ មាន $5.4.4.3.2=480$ របៀបរើស $\overline{a_2a_3a_4a_5a_6}$ ។

ដូចនេះមាន $4.6.480=11520$ ចំនួន A ។

យើងបាន $9600+11520=21120$ ចំនួន A ក្នុងករណី A មានលេខសេស 2 ។

ករណីទី៣: A មានលេខសេស 3

បើ a_1 សេស: មាន 5 របៀបរើស a_2, 3 របៀបរើស 2 ទីតាំងមិននៅជិតគ្នារបស់ចំនួនសេស 2 ក្នុង $\overline{a_3a_4a_5a_6}$ ។

ដូចនេះ មាន $5.5.3.4.4.3=10800$ ចំនួន A ។

បើ a_1 គូ: មាន 4 របៀបរើស a_1, 1 របៀបរើស 3 ទីតាំងមិននៅជិតគ្នារបស់ 3 ចំនួនសេសក្នុង $\overline{a_2a_3a_4a_5a_6}$ ។

ដូចនេះ មាន $4.5.4.3.4.3=2880$ ចំនួន A ។

ដូចនេះ មាន $10800+2880=13680$ ចំនួន A ក្នុងករណី A មានចំនួនសេស 3 ។

សន្និដ្ឋាន: ចំនួន A ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់មាន $3000+21120+13680=37800$ ចំនួន។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

វិញ្ញាសាស្នើទី២៥

១. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោមលើសំនុំចំនួនគត់វិជ្ជមាន: $\begin{cases} x^{30}+y^4=(x+y)^{2012} \\ y^{30}=\left(y^4+x^{2012}\right)x^{2012} \end{cases}$ ។

២. គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនគត់វិជ្ជមាន $s_1<s_2<...<s_n<...$ យ៉ាងណាឲ្យ មានស្វ៊ីតរងពីររបស់វាគឺ $s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, ...$ និង $s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, ...$ សុទ្ធតែជាស្វ៊ីតនព្វន្ត។
ស្រាយបញ្ជាក់ថា ស្វ៊ីតដែលឲ្យក៏ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែរ។

៣. ក្នុងប្លង់, គេឲ្យពីរចំនុចនឹង A,B (A ផ្សេងពី B)។ ចំនុច C មួយ ចល័តនៅលើប្លង់យ៉ាងណាឲ្យ $\widehat{ACB}=\alpha$ (α មិនប្រែប្រួល, $0^0<\alpha<180^0$)។ រង្វង់ផ្ចិត I ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC ហើយប៉ះនឹង AB,BC,CA រៀងគ្នាត្រង់ D,E,F ។ បណ្តាបន្ទាត់ AI,BI កាត់ EF រៀងគ្នាត្រង់ M,N ។
$a.$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា MN មានប្រវែងមិនប្រែប្រួលពេល C ផ្លាស់ទី។
$b.$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា រង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ DMN តែងកាត់តាមចំនុចនឹងមួយពេល C ផ្លាស់ទី។

៤. គេឲ្យអនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ មួយ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា តែងមានគូចំនួនពិត x,y ដើម្បីឲ្យ:
$f(x-f(y))>yf(x)+x$ ។

៥. គេឲ្យបណ្តាចំនួនគត់ a,b,c,d ផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព: $a+b\sqrt{2012}=\left(c+d\sqrt{2012}\right)^n$ (ចំពោះ $n\in\mathbb{N}^*$ និង n ជាចំនួនគូ)
ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a\geq 44b$ ។

៦. នៅលើប្លង់មានរង្វង់មួយចំនួន។ ដោយដឹងថា មានថាសមួយមានលក្ខណៈកំណត់ដោយ៖ ចំពោះរង្វង់បីណាក៏ដោយ ក្នុងចំនោមពួកវា តែងអាចរកបានទីតាំងដើម្បីដាក់ថាសកាត់រង្វង់ទាំងបីនេះ។
ស្រាយបញ្ជាក់ថា មានទីតាំងដើម្បីដាក់ថាស ឲ្យកាត់គ្រប់រង្វង់ទាំងអស់។

ចំលើយ

១. យើងពិនិត្យសមីការ $y^{30}=\left(y^4+x^{2012}\right)x^{2012}$ (*)
តាង $t=x^{2012}\Rightarrow t\in\mathbb{N}^*$ (ព្រោះ $x\in\mathbb{N}^*$)
ពេលនោះសមីការ (*) ក្លាយទៅជាសមីការដឺក្រេទីពីរ (អញ្ញត្តិ t): $t^2+y^4t-y^{30}=0$ (1)
គណនា $\Delta=y^8+4y^{30}=4y^{30}+y^8>0$ ចំពោះ $y\in\mathbb{N}^*$
យើងមាន $y\in\mathbb{N}^*$ (តាមបំរាប់)
និង $\left(2y^{15}+1\right)^2=4y^{30}+4y^{15}+1>4y^{30}+y^8>4y^{30}=\left(2y^{15}\right)^2>0$
ដូចនោះ: $2y^{15}+1>\sqrt{\Delta}>2y^{15}$
ដោយ $\left(2y^{15}+1\right)\in\mathbb{N}^*$, $\left(2y^{15}\right)\in\mathbb{N}^*$ ហើយ $\left(2y^{15}+1\right),\left(2y^{15}\right)$ ជាពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិតគ្នា
នាំឲ្យ Δ ត្រូវតែជាចំនួនអសនិទានវិជ្ជមាន។
ពីនោះ: សមីការ (1) គ្មានឫសលើសំនុំ $\mathbb{N}^*$ ទេ, នាំឲ្យសមីការ (*) គ្មានឫសលើសំនុំ $\mathbb{N}^*$ ។
ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការដែលឲ្យគ្មានចំលើយលើសំនុំ $\mathbb{N}^*$ ទេ។

២. តាង D និង E រៀងគ្នាជាផលសងរបស់ស្វ៊ីតនព្វន្តទាំងពីរ $s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, ...$ និង $s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, ...$ ។

តាង $A=s_{s_1}-D$ និង $B=s_{s_1+1}-E$ ។ ពេលនោះ, ចំពោះគ្រប់ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន, យើងបាន $s_{s_n}=A+nD$ និង $s_{s_n+1}=B+nE$

ម្យ៉ាងទៀត តាមបំរាប់យើងមាន: $s_{s_n}<s_{s_n+1}\le s_{s_{n+1}}\Rightarrow A+nD<B+nE\le A+(n+1)D$

$\Rightarrow 0<B-A+n(E-D)\le D, \forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow D-E=0$

$\Rightarrow 0<B-A\le D$ (1)

តាង $m=\min\{s_{n+1}-s_n : n=1,2,...\}$, យើងបាន:

$B-A=\left(s_{s_1+1}-E\right)-\left(s_{s_1}-D\right)=s_{s_1+1}-s_{s_1}\ge m$ (2)

$D=A+(s_1+1)D-(A+s_1D)=s_{s_{s_1+1}}-s_{s_{s_1}}=s_{B+D}-s_{A+D}\ge m(B-A)$ (3)

តាម (1) យើងពិនិត្យពីរករណី:

ករណីទី១: $B-A=D$.

ពេលនោះ ចំពោះ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាននីមួយៗ, យើងបាន: $s_{s_n+1}=B+nD=A+(n+1)D=s_{s_{n+1}}$

$\Rightarrow s_{n+1}=s_n+1$, ដូចនោះ ស៊ីតដែលឲ្យជាស៊ីតនព្វន្តដែលមានរេសុងស្មើ1។

ករណីទី២: $B-A<D$ ។

តាង N ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $s_{N+1}-s_N=m$ ។

យើងមាន $m(A-B+D-1)=m((A+(N+1)D)-(B+ND+1))$

$$\le s_{A+(N+1)D}-S_{B+ND+1}=s_{s_{s_{N+1}}}-s_{s_{s_N}+1}$$

$=(A+s_{N+1}+D)-(B+(s_N+1)D)=(s_{N+1}-s_N)D+A-B-D=mD+A-B-D$

$\Rightarrow (B-A-m)+(D-m(B-A))\le 0$ (4)

តាម (2),(3) និង (4) ទាញបាន $B-A=m$ និង $D=m(B-A)$

ឥឡូវ យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់ថា ស៊ីតដែលបានឲ្យជាស៊ីតនព្វន្តដែលមានរេសុងស្មើ m ។

ពិតជាដូចនេះ, ឧបមាថាមាន ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n យ៉ាងណាឲ្យ $s_{n+1}>s_n+m$ ។

ពេលនោះ, យើងបាន: $m(m+1)\le m(s_{n+1}-s_n)\le m(s_{s_m}-s_s)=(A+(n+1)D)-(A+nD)=D=m^2$,

មិនសមហេតុផល។

ដូចនេះ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n យើងបាន $s_{n+1}=s_n+m$ (បញ្ហាត្រូវស្រាយបញ្ជាក់)។

៣. $a.$ យើងមាន: $\widehat{AIB}=180^0-\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)$

ម្យ៉ាងទៀត: $\widehat{CFN}=\frac{180^0-C}{2}=90^0-\frac{C}{2}$

ពីនោះទាញបាន: $\widehat{NFA}+\widehat{NIA}=\left(180^0-\widehat{NFC}\right)+\left(180^0-\widehat{AIB}\right)=90^0+\frac{C}{2}+\frac{A}{2}+\frac{B}{2}=180^0$

ដូចនេះ A,I,N,F ស្ថិតនៅលើរង្វង់មួយ។ ទាញបាន $\widehat{INA}=\widehat{IFA}=90^0$

បកស្រាយដូចគ្នា យើងបាន: $\widehat{MIB}=\frac{A}{2}+\frac{B}{2}=\frac{180^0-C}{2}$ និង $\widehat{MEB}=\widehat{CEF}=\frac{180^0-C}{2}$ ។

នាំឲ្យ $\widehat{MIB}=\widehat{MEB}$, គឺថាចតុកោណ $MEIB$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់, ពេលនោះ:

$$\widehat{IMB}=\widehat{IEB}=90^0$$

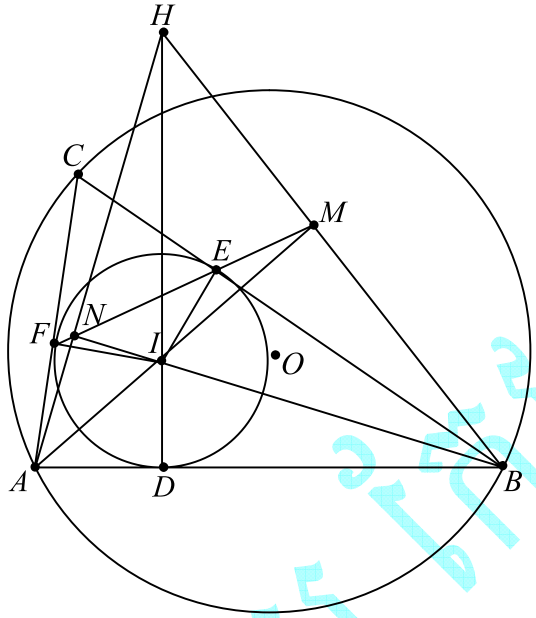
ទាញបាន M,N ស្ថិតនៅលើរង្វង់ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត AB ។

តាង S ជាចំនុចកណ្ដាលរបស់ AB, យើងបាន:

$$\widehat{MSN} = 2\widehat{MBN} = 2\widehat{NEI} = 2\widehat{ICF} = \widehat{ACB} = \alpha$$

ម្យ៉ាងទៀត, តាមទ្រឹស្ដីបទស៊ីនុស: $MN = AB.\sin\dfrac{\alpha}{2}$

ដូចនេះ MN មានប្រវែងមិនប្រែប្រួលពេល C ប្រែប្រួល។



$b.$តាង $H = AN \cap BM$ ។ ពិនិត្យត្រីកោណ HAB ,យើងមាន M, D, N ជាជើងបណ្ដាកំពស់(តាមសំនួរ a)។ ដូចនោះ រង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ DMN ជារង្វង់ $Euler$ របស់ត្រីកោណ HAB, ដូចនោះ វាកាត់តាមចំនុចកណ្ដាល S របស់ជ្រុង AB, នោះគឺជាចំនុចនឹងមួយ។

៤. ឧបមាប្រាសមកវិញថា ចំពោះអនុគមន៍ f ដែលបានឲ្យ, យើងតែងបាន:

$$f(x - f(y)) \le y.f(x) + x, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \qquad (1).$$

តាង $a = f(0)$ ។ ឲ្យ $y = 0$ ជំនួសចូល (1), យើងបាន:

$$f(x-a) \le x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(y) \le y + a, \forall y \in \mathbb{R} \qquad (2).$$

យក $x = f(y)$ ជំនួសចូល (1), គួបផ្សំនឹង (2), យើងបាន:

$$a = f(0) \le yf(f(y)) + f(y) \le y(f(f(y))) + y + a, \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y(f(f(y)) + 1) \ge 0, \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow f(f(y)) \ge -1, \forall y > 0 \qquad (3)$$

តាម $(2)\&(3)$ យើងបាន: $-1 \le f(f(y)) \le f(y) + a, \forall y > 0$

$$\Rightarrow f(y) \ge -a - 1, \forall y > 0 \qquad (4)$$

ឥឡូវយើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x) \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (5)

ពិតជាដូចនេះ, ឧបមាថាផ្ទុយមកវិញ គឺមាន $x_0 \in \mathbb{R}$ យ៉ាងណាឲ្យ $f(x_0) > 0$ ។

យើងយកចំនួនពិត y_0 មួយ យ៉ាងណាឲ្យ $y_0 < x_0 - a$ និង $y_0 < \dfrac{-a - x_0 - 1}{f(x_0)}$ ។

ពេលនោះ, តាម (2) ,យើងបាន $x_0 - f(y_0) \ge x_0 - (y_0 + a) > 0$

គួបផ្សំនឹង $(1)\&(4)$, យើងបាន: $y_0 f(x_0) + x_0 \ge f(x_0 - f(y_0)) \ge -a - 1$

$\Rightarrow y_0 \geq \dfrac{-a-x_0-1}{f(x_0)}$, ករណីនេះផ្ទុយនឹងការរើសយក y_0 ។

ដូចនេះ (5) ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់។

ឲ្យ $x=0$ ជំនួសចូល (5), យើងបាន $a=f(0)\leq 0$, ដូចនោះ គួបផ្សំនឹង (2)

ទាញបាន $f(x)\leq x, \forall x\in\mathbb{R}$ ។

ឥឡូវយើងជ្រើសយក y យ៉ាងណាឲ្យ $y>0$ និង $y>-f(-1)-1$, រួចយក $x=f(y)-1$ ។

គួបផ្សំនឹង (1),(5) & (6) យើងបាន

$f(-1)=f(x-f(y))\leq yf(x)+x=yf(f(y)-1)+f(y)-1\leq y(f(y)-1)-1\leq -y-1$

ពីនោះ នាំឲ្យ $y\leq -f(-1)-1$, ផ្ទុយនឹងការជ្រើសយក y ។

ដូចនេះ ការឧបមា (1) គឺខុស, ទាញបានបញ្ហាត្រូវស្រាយបញ្ជាក់។

៥. តាង $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x=p+q\sqrt{2012},\ p,q\in\mathbb{Z}\right\}$ ។

ដំបូងយើងស្រាយបញ្ជាក់ *Lemma* ខាងក្រោម:

*Lemma*1: ស្រាយបញ្ជាក់ $\left(c+d\sqrt{2012}\right)^k\in A; \forall k\in\mathbb{N}^*; c,d\in\mathbb{Z}$ ។

+ ចំពោះ $k=1$,ជាក់ស្តែងយើងបាន $\left(c+d\sqrt{2012}\right)\in A$

+ ឧបមាថាចំពោះ $k\in\mathbb{N}^*$,យើងបាន $\left(c+d\sqrt{2012}\right)^k\in A$ ។

យើងស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left(c+d\sqrt{2012}\right)^{k+1}\in A$

ពិតជាដូចនេះ, យើងមាន: $\left(c+d\sqrt{2012}\right)^{k+1}=\left(c+d\sqrt{2012}\right)^k.\left(c+d\sqrt{2012}\right)$ (*)

តាមបំរាប់វិចារអនុមានរួម, យើងមាន: $\left(c+d\sqrt{2012}\right)^k\in A\Rightarrow \exists p,q\in\mathbb{Z}$ យ៉ាងណាឲ្យ

$$\left(c+d\sqrt{2012}\right)^k=p+q\sqrt{2012} \qquad (**)$$

ជំនួស (**) ចូល (*) យើងបាន:

$$\begin{aligned}\left(c+d\sqrt{2012}\right)^{k+1}&=\left(p+q\sqrt{2012}\right).\left(c+d\sqrt{2012}\right)\\&=\underbrace{\left(pc+2012qd\right)}_{\in\mathbb{Z}}+\underbrace{\left(pd+qc\right)}_{\in\mathbb{Z}}\sqrt{2012}\in A\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\left(c+d\sqrt{2012}\right)^k\in A; \forall k\in\mathbb{N}^*; c,d\in\mathbb{Z}$

*Lemma*2: បើមាន $c,d,p,q\in\mathbb{Z}$ យ៉ាងណាឲ្យ $c+d\sqrt{2012}=p+q\sqrt{2012}$ នាំឲ្យ $\begin{cases}c=p\\d=q\end{cases}$

ពិតជាដូចនេះ, បើយើងមានសមភាព

$$c+d\sqrt{2012}=p+q\sqrt{2012}\text{ , ចំពោះ }c,d,p,q\in\mathbb{Z}$$

$\Leftrightarrow (c-p)+(d-q)\sqrt{2012}=0$

ដោយ $c,d,p,q\in\mathbb{Z}$ និង $\sqrt{2012}$ ជាចំនួនអសនិទាន, នាំឲ្យតាម (1) យើងបាន $\begin{cases}c-p=0\\d-q=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=p\\d=q\end{cases}$

ត្រឡប់មកលំហាត់យើងវិញ, យើងមាន:

$$\left(a+b\sqrt{2012}\right)=\left(c+d\sqrt{2012}\right)^n$$,ចំពោះ $n\in\mathbb{N}^*$, n ជាចំនួនគូ

$$\Leftrightarrow\left(a+b\sqrt{2012}\right)=\left[\left(c+d\sqrt{2012}\right)^k\right]^2$$ (ព្រោះ n គូ, តាង $n=2k, k\in\mathbb{N}^*$)

$$=\left(p+q\sqrt{2012}\right)^2$$ (ចំពោះ $p,q\in\mathbb{Z}$)

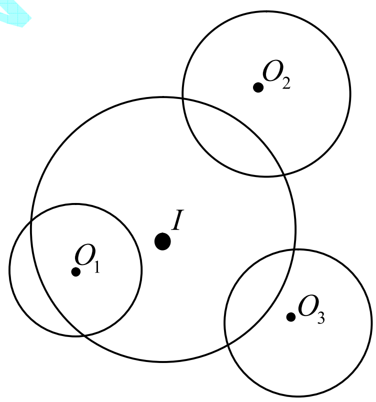
$$=\left(p^2+2012q^2\right)+2pq\sqrt{2012}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=p^2+2012q^2\\ b=2pq\end{cases}$$

តាមវិសមភាព *Cauchy* ,យើងបាន: $a=p^2+2012q^2\geq 2\sqrt{2012}\,|pq|>2.44pq=44b$

ដូចនេះ $a\geq 44b$ ។

៦. យើងទទួលស្គាល់ទ្រឹស្តីបទសំខាន់ខាងក្រោម: ក្នុងប្លង់, ប្រសព្វនៃគ្រួសាររូបធរណីមាត្រប៉ោងមានចំនួនកំណត់មួយខុសពីសំនុំទទេ បើប្រសព្វនៃរូបធរណីមាត្របីណាក៏ដោយក្នុងចំនោមពួកវាខុសពីសំនុំទទេ។
តាង R ជាកាំហើយ I ជាផ្ចិតថាស, R_i ជាកាំហើយ O_i ជាផ្ចិតរបស់បណ្តារូបរង្វង់ F_i ដែលបានឲ្យ, G_i ជាបណ្តារូបរង្វង់មានផ្ចិត O_i និងមានកាំ $R+R_i$ $(i=\overline{1,n})$ ។



តាមការសន្និដ្ឋានខាងលើ រូបរង្វង់ 3, F_1,F_2,F_3 ណាក៏ដោយ ក្នុង n រូបរង្វង់ F_i ដែលបានឲ្យ $\left(i=\overline{1;n}\right)$ តែងកាត់គ្នានឹងថាស $\Rightarrow O_iI\leq R+R_i$ $\left(i=\overline{1;3}\right)$
ដូចនោះ: G_1,G_2,G_3 មានផ្ទុកផ្ចិត I របស់ថាស
រីរង្វង់ទាំងបី G_1,G_2,G_3 ណាក៏ដោយមានប្រសព្វខុសពីសំនុំទទេ។
តាមទ្រឹស្តីបទខាងលើ, យើងបានប្រសព្វរបស់ប្រព័ន្ធ n រូបរង្វង់ទាំងមូល G_i $\left(i=\overline{1;n}\right)$ ខុសពីសំនុំទទេ។
ពេលនោះ យើងដាក់ផ្ចិត I របស់ថាសស្ថិតនៅចំទីតាំងផ្នែកប្រសព្វនេះ នោះថាសនឹងកាត់គ្រប់រង្វង់ដែលបានឲ្យ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

វិញ្ញាសាស្នើទី២៦

១. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases}2x^3+4x+3=(y+1)(y^2+2y+2)\\ 2y^3+4y+3=(z+1)(z^2+2z+2)\\ 2z^3+4z+3=(x+1)(x^2+2x+2)\end{cases}$

២. រកលីមីតរបស់ស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ: $\begin{cases}u_0\in[0;+\infty]\\ u_{n+1}=\dfrac{2}{1+u_n^2},\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$

៣. រកលក្ខខណ្ឌរបស់ λ ដើម្បីឲ្យ ចំពោះ λ នីមួយៗ (ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌនោះ), មានត្រីកោណ ABC មួយ ជាត្រីកោណមិនទាល ផ្ទៀងផ្ទាត់ $m_a+m_b+m_c<\lambda R$,ដែល m_a,m_b,m_c និង R រៀងគ្នាជាប្រវែងអង្គត់មេដ្យាន និងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC ។

៤. រកគ្រប់បណ្ដាអនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ជាប់ត្រង់ $x=0$ ដើម្បីឲ្យចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ គេបាន:

$$2012f(2012x)-2011f(2011x)=(2012)^2x$$ ។

៥. គេឲ្យ p ជាចំនួនបឋមសេស និងសំនុំ $M=\{1,2,...,2p\}$ ។ ចំពោះសំនុំរង X របស់ M នីមួយៗ, គេតាង $S(X)$ ជាផលបូកបណ្ដាធាតុរបស់សំនុំ X ។ តាង $A_i=\left\{X\subset M,|X|=p,S(x)\equiv i\ (\text{mod } p)\left(i\in\overline{0,p-1}\right)\right\}$

$a)$.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $|A_1|=|A_2|=...=|A_{p-1}|=|A_0|-2$ ។

$b)$.រកចំនួនសំនុំរង C របស់សំនុំ M ដើម្បីឲ្យ $|C|=p$ ហើយ $S(C)$ ចែកដាច់នឹង p ។

៦. រកឫសជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមានរបស់សមីការ: $x^2+3y^2=(4691)^{4691}(x+y)$ ។

ចំលើយ

១. តាង $f(t)=2t^3+4t+3,\ f'(t)=6t^3+4>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$

$g(t)=(t+1)(t^2+2t+2)=t^3+3t^2+4t+2$

$g'(t)=3t^2+6t+4>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$

f និង g ជាបណ្ដាអនុគមន៍កើនលើ $\mathbb{R}$ នាំឲ្យប្រព័ន្ធសមីការ:

$$\begin{cases}f(x)=g(y)\\ f(y)=g(z)\\ f(z)=g(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y=z\\ f(x)=g(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y=z\\ x^3-3x^2+1=0\end{cases}$$

ពិនិត្យសមីការ: $x^3-3x^2+1=0\qquad(1)$

ដោយ $x=0$ មិនមែនជាឫសរបស់សមីការនាំឲ្យ $(1)\Leftrightarrow 1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^3}=0$

តាង $t=\dfrac{1}{x}$, យើងបានសមីការ $t^3-3t+1=0$

អនុគមន៍ជាប់ $h(t)=t^3-3t+1$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\begin{cases}h(-2)h(-1)<0\\ h(0)h(1)<0\\ h(1)h(2)<0\end{cases}$

នាំឲ្យសមីការ $h(t)=0$ មានឫសបីផ្សេងគ្នា ហើយឫសទាំងបីស្ថិតក្នុងចន្លោះ $(-2;2)$

តាង $t=2\cos u,\ u\in(0;\pi)$

សមីការ $h(t)=0$ ក្លាយទៅជា $8\cos^3u-6\cos u+1=0$

$\Leftrightarrow\cos 3u=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 3u=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\Leftrightarrow u=\pm\dfrac{2\pi}{9}+k\dfrac{2\pi}{3};\ k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ ឫសទាំងបីរបស់សមីការ $h(t)=0$ គឺ: $t_1=2\cos\dfrac{2\pi}{9},t_2=2\cos\dfrac{8\pi}{9},t_3=2\cos\dfrac{14\pi}{9}$ ។

ដូចនេះ បណ្ដាចំលើយរបស់ប្រព័ន្ធសមីការដែលឲ្យគឺ:

$$(x,y,z)=\left(\frac{1}{t_1},\frac{1}{t_1},\frac{1}{t_1}\right);\left(\frac{1}{t_2},\frac{1}{t_2},\frac{1}{t_2}\right);\left(\frac{1}{t_3},\frac{1}{t_3},\frac{1}{t_3}\right)$$ ។

២. + ឃើញថា $u_n\ge 0\ \forall n\in\mathbb{N}$

+ ដោយសមីការ: $a=\dfrac{2}{1+a^2}\Leftrightarrow a=1$ នោះបើស្វ៊ីតមានលីមីត គឺលីមីតនោះស្មើនឹង1។

+ ពិនិត្យអនុគមន៍ $f:[0;+\infty)\to[0;+\infty)$

$$x \mapsto f(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

យើងបាន: $f'(x) = \frac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2} \le 0$, ដូចនោះ f ជាអនុគមន៍ចុះ។

យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់ថា $u_{2m} \to 1$ និង $u_{2m+1} \to 1$ ពេល $m \to +\infty$

$+$ ពិនិត្យអនុគមន៍ $g(x) = f(f(x)) = \dfrac{2\left(1+x^2\right)^2}{\left(1+x^2\right)^2+4}$

ដោយ f ជាអនុគមន៍ចុះ នាំឲ្យ g ជាអនុគមន៍កើនលើ $[0;+\infty)$

$+\ \forall x \in [0;+\infty)$, $g(x) - x = -\dfrac{(x-1)^3(x^2+x+2)}{(1+x^2)^2+4}$

$*$ ករណីទី១:

$+$ ពេល $u_0 \in [0;1]$

ពេលនោះ $\forall m \in \mathbb{N}, \left(u_{2m} \in [0;1] \text{ និង } u_{2m+1} \in [0;+\infty)\right)$

ហើយយើងបាន $\begin{cases} u_{2m+2} - u_{2m} = g(u_{2m}) - u_{2m} \ge 0 \\ u_{2m+3} - u_{2m+1} = g(u_{2m+1}) - u_{2m+1} \le 0 \end{cases}$

ដូចនោះ, (u_{2m}) ជាស្វ៊ីតកើន ហើយ (u_{2m+1}) ជាស្វ៊ីតចុះ។

ក្រៅពីនោះ, $\forall m \in \mathbb{N}$, យើងបាន $u_{2m} \le 1 \le u_{2m+1}$, នាំឲ្យស្វ៊ីត (u_{2m}) ជាស្វ៊ីតរួមទៅរកធាតុមួយ $\lambda \in [0;+\infty)$ ហើយស្វ៊ីត (u_{2m+1}) ជាស្វ៊ីតរួមទៅរកធាតុ $\mu \in [0;+\infty)$ ។

ដោយ g ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[0;+\infty)$, ដូចនោះ $g(x) = x \Leftrightarrow x = 1$

នាំឲ្យ $\lambda = \mu = 1$

ដូចនេះ $u_n \to 1$ ពេល $n \to +\infty$

$*$ ករណីទី២: $u_0 \in [1;+\infty)$

ដោយ $u_1 = f(u_0) \in [0;1]$, យើងបំលែងទៅរកករណីខាងលើ (តាមការជំនួស u_0 ដោយ u_1), ហើយយើងក៏ទទួលបានការសន្និដ្ឋាន $u_n \to 1$ ពេល $n \to +\infty$

៣. $+$ យើងបានដឹងលទ្ធផលជាទូទៅថា:

ចំពោះគ្រប់ ΔABC មិនមែនជាត្រីកោណទាល, នាំឲ្យ $m_a + m_b + m_c > 4R$

$+$ ទាញបាន λ ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់: $\lambda > 4$

$+$ ពេល $\lambda > 4$ ។ ពិនិត្យ ΔABC ជាត្រីកោណសមបាត, មានបាត $AB = 2d$ និងកំពស់ h ។

ទំលាក់ $A_1D \perp AB$ (AA_1 ជាមេដ្យានទំលាក់ពី A)។ ពិនិត្យ Δ កែង AA_1D, យើងមាន:

$$m_a = m_b = AA_1 + A_1D = \frac{3}{2}d + \frac{h}{2}$$

ដូចនោះ $m_a + m_b + m_c < 2\left(\frac{3}{2}d + \frac{h}{2}\right) + h = 3d + 2h = h\left(2 + 3\frac{d}{h}\right) < 2R\left(2 + 3\frac{d}{h}\right)$

ដូចនេះ, គ្រាន់តែយក $\frac{d}{h}$ តូចល្មម (ជាក់ស្តែងគឺ $6\frac{d}{h} < \lambda - 4$) យើងនឹងបាន $m_a + m_b + m_c < \lambda R$ ។

ដូចនេះ $\lambda > 4$ ជាលក្ខខណ្ឌដែលត្រូវរក។

៤. ចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការទីមួយនឹង 2012 , តាង $a=\dfrac{2011}{2012}$ និង $t=2012x$,

យើងបាន $f(t)-af(at)=t$ ។

ពីនេះទាញបាន $f(0)=0$ ។

ពិនិត្យស្វ៊ីត $t_n=a^n t, n\ge 1$, យើងបានប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម:

$$f(t)-af(t_1)=t \quad (1)$$

$$f(t_1)-af(t_2)=t_1 \quad (2)$$

....

$$f(t_n)-af(t_{n+1})=t_n \quad (n+1)$$

គុណសមីការទី k $(1\le k\le n+1)$ នឹង a^{k-1} , រួចបូក $(n+1)$ សមីការបញ្ចូលគ្នាយើងបាន:

$$f(t)-a^{n+1}f(t_{n+1})=t\left(1+a^2+a^4+\ldots+a^{2n}\right) \quad (*)$$

ដោយ $0<a<1$ នាំឲ្យ $a^n\to 0$ ហើយដូចនោះ $t_n\to 0$ ពេល $n\to+\infty$ ។

ប្រើប្រាស់បំរាប់ដែល f ជាប់ត្រង់ $t=0$ នោះក្នុង $(*)$ យើងឲ្យ $n\to+\infty$ យើងបាន: $f(t)=\dfrac{t}{1-a^2}$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ឡើងវិញ: ចំពោះ $f(x)=\dfrac{x}{1-a^2}, a=\dfrac{2011}{2012}$ គឺផ្ទៀងផ្ទាត់ប្រធាន។

៥. $a)$ ដើម្បីស្រាយថា $|A_1|=|A_2|=....=|A_{p-1}|=|A_0|-2$, យើងនឹងស្រាយថាពហុធាទាំងពីរខាងក្រោមមានសំនុំឫស(កុំផ្លិច) ដូចគ្នា

$$f(x)=(|A_0|-2)+|A_1|x+\ldots+|A_{p-1}|x^{p-1}$$

$$g(x)=1+x+\ldots+x^{p-1}$$

តាង $A=\{X\subset M,|X|=p\}$ ។ ពេលនោះ, $A=\bigcup_{i=0}^{p-1}A_i$ និង $A_i\cap A_j=\varnothing$

តាង α ជាឫសមួយរបស់ $g(x)$ នាំឲ្យ $\alpha,\alpha^1,\ldots,\alpha^{p-1}$ ជាឫសទាំងអស់របស់ $g(x)$ ។

យើងស្រាយថា $f(\alpha^i)=0\ \ \forall i=\overline{1,p-1}$,

ករណីនេះសមមូលនឹង $\sum_{i=0}^{p-1}|A_i|\alpha^i=2 \quad (1)$

ដោយ $\alpha^p=1$, នោះបើ $X\in A_i$ នាំឲ្យ $\alpha^{S(X)}=\alpha^i$ ។ ម្យ៉ាងទៀត, $|A_i|$ ជាចំនួនបណ្តាសំនុំរង $X\in A$, យ៉ាងណាឲ្យ $S(X)\equiv i \pmod p$ ។ ដូចនោះ , $(1)\Leftrightarrow\sum_{X\in A}\alpha^{S(X)}=2$

ពិនិត្យពហុធា: $P(x)=(x-\alpha)(x-\alpha^2)....(x-\alpha^{2p})=\sum_{X\subset M}(-1)^{|x|}\alpha^{S(X)}x^{2p-|x|} \quad (3)$

ម្យ៉ាងទៀត $P(x)=\prod_{k=1}^{p}\left(x-\alpha^k\right).\prod_{k=1}^{p}\left(x-\alpha^{p+k}\right)=\left(x^p-1\right)^2 \quad (4)$

ប្រៀបធៀបមេគុណរបស់ x^p ក្នុងពន្លាតរបស់ $P(x)$ ក្នុង (3) និង (4) , យើងបាន:

$(-1)^p\sum_{X\in A}\alpha^{S(X)}=-2$, ដោយ p ជាចំនួនសេស យើងទទួលបាន (1) ។

$b)$ យើងមាន, ចំនួនសំនុំរង C ដែលត្រូវរក ស្មើនឹងចំនួនធាតុរបស់ A_0 , តាមសំនួរ $a)$ គឺ:

$$|A_0|-2=\frac{|A_1|+|A_2|+\ldots+|A_{p-1}|+|A_0|-2}{p}=\frac{|A|-2}{p}$$

ដូចនោះ $|A_0| = 2 + \dfrac{C_{2p}^{p} - 2}{p}$ ។

៦. ដំបូងយើងស្រាយបញ្ជាក់ *Lemma* :

<u>*Lemma*</u>: បើ p ជាចំនួនបឋមសេសមានរាង $3k+2$ ហើយ $x^2+3y^2 \vdots p$ នាំឲ្យ $x \vdots p$ និង $y \vdots p$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់: ឧបមាថា x ចែកមិនដាច់នឹង p, ដោយ $x^2+3y^2 \vdots p$ នាំឲ្យ y ក៏ចែកមិនដាច់នឹង p ដែរ។

ពីនោះ, ដោយ p ជាចំនួនបឋមនាំឲ្យ $(x,p)=(y,p)=1$ ។

យើងបាន $x^2+3y^2 \vdots p \Rightarrow x^2+3y^2 \equiv 0 \pmod p$

$$\Rightarrow x^2 \equiv -3y^2 \pmod p \Rightarrow \left(x^2\right)^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(-3y^2\right)^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$$

$$\Rightarrow x^{p-1} = \left(-3\right)^{\frac{p-1}{2}} . y^{p-1} \pmod p$$

ដោយ $(x,p)=(y,p)=1$, នោះតាមទ្រឹស្តីបទ *Fermat* , យើងបាន:

$x^{p-1} \equiv p^{p-1} \equiv 1 \pmod p$

ដូចនោះ: $(1) \Rightarrow (-1)^{\frac{p-1}{2}} . 3^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p \qquad (2)$

ដោយ p ជាចំនួនបឋមហើយ $p \equiv 2 \pmod 3$ នាំឲ្យ p ត្រូវមានរាង $12h+5$ រឺ $12h-1$ ។

$+$ បើ $p=12h+5$ នាំឲ្យ $(-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1$ នោះ $(2) \Leftrightarrow 3^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p \qquad (3)$

(3) មិនអាចកើតឡើងទេ ព្រោះយើងដឹងថា: បើ p ជាចំនួនបឋមសេសនោះ 3 ជាចំនួនការេប្រាកដ $(\bmod\, p)$ លុះត្រាតែ p មានរាង $12h \pm 1$ ។

$+$ បើ $p=12h-1$ នាំឲ្យ $(-1)^{\frac{p-1}{2}} = -1$ នាំឲ្យ $(2) \Leftrightarrow 3^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p \quad (4)$

តែ (4) ក៏មិនអាចកើតមានដែរ (ព្រោះចំពោះ $p=12h-1$ គឺ $3^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$)

ដូចនេះ *Lemma* ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់។

• ច្បាស់ណាស់ $(0;0)$ និង $\left((4691)^{4691};0\right)$ ជាបណ្តាឬសរបស់សមីការដែលឲ្យ។

• ពិនិត្យ $x>0, y>0$ ។ ឃើញថា 4691 ជាចំនួនបឋមមានរាង $3k+2$ ។

តាមសមីការ (1) ទាញបាន $x^2+3y^2 \vdots 4691$, ប្រើប្រាស់ *Lemma* ដែលទើបស្រាយបញ្ជាក់, យើងបាន:

$x \vdots 4691$ និង $y \vdots 4691$ ។

តាង $\begin{cases} x = 4691x_1 \\ y = 4691y_1 \end{cases}$

យើងបានសមីការ: $x_1^2 + 3y+1^2 = \left(4691\right)^{4691}\left(x_1+y_1\right)$

បកស្រាយស្រដៀងគ្នានឹងខាងលើដែរ, បន្ទាប់ពី 4691 ជំហានក្រោយមក, យើងបានសមីការ:

$$x_{4691}^2 + 3y_{4691}^2 = x_{4691} + y_{4691} \qquad (5)$$

ដែល $\begin{cases} x = (4691)^{4691} x_{4691} \\ y = (4691)^{4691} y_{4691} \end{cases}$

ងាយនឹងទាញបាន (5) មិនមានឬសជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

ដូចនេះ សមីការដែលឲ្យមានចំលើយជាចំនួនគត់វិជ្ជមានតែពីរគត់គឺ: $(0;0)$ និង $\left((4691)^{4691};0\right)$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

វិញ្ញាសាស៊េរីទី២៧

១. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ: $\begin{cases} x^3+y^3=17 \\ \log_3 x-\log_y 2=0 \end{cases}$

២. គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ: $u_1=\frac{4}{9}$ និង $u_{n+1}=-\frac{4}{9}+\frac{8}{9}\sqrt{3u_n}$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ស្វ៊ីត (u_n) មានលីមីត។ រកតំលៃលីមីតនេះ។

៣. ក្នុងត្រីកោណ ABC បណ្តាបន្ទាត់ MA, MB, MC រៀងគ្នាកាត់បណ្តាបន្ទាត់ BC, CA និង AB ត្រង់ α', β', γ'។

បណ្តាបន្ទាត់ $\beta'\gamma', \alpha'\gamma', \alpha'\beta'$ កាត់បណ្តាបន្ទាត់ BC, CA, AB រៀងគ្នាត្រង់ α, β, γ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា បន្ទាត់ទាំងបី $A\alpha', B\beta, C\alpha$ ប្រសព្វគ្នាត្រង់ N ហើយបីចំនុច α, β, γ នៅលើបន្ទាត់ Δ។

៤. រកគ្រប់បណ្តាអនុគមន៍ $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ ផ្ទៀងផ្ទាត់: $f(m+f(n))=n+f(m+2012)$ $\forall m,n\in\mathbb{N}^*$។

៥. រកចំនួនគត់វិជ្ជមាន n តូចបំផុត ដើម្បីឲ្យចំនួន 3^n-1 ចែកដាច់នឹង 2^{2012}។

៦. គេឲ្យសំនុំ $X=\{1,2,3,...,2012\}$, ពិនិត្យគ្រប់បណ្តាសំនុំរងរបស់ X, សំនុំរងនីមួយៗមាន 3 ធាតុ។

ក្នុងសំនុំរងនីមួយៗ គេជ្រើសយកចំនួនតូចបំផុត។ គណនាមធ្យមនព្វន្តនៃបណ្តាចំនួនដែលរើសចេញ។

ចំលើយ

១. បើប្រព័ន្ធមានចំលើយ x,y នោះ $x,y>1$ ព្រោះបើ $0<x,y<1$ នាំឲ្យ (1) មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនោះ យើងបានលក្ខខណ្ឌចាំបាច់ចំពោះ x,y គឺ $x>1$ និង $y>1$។

តាង $\log_3 x=t$ ចំពោះ $t>0$ (ព្រោះ $x>1$), យើងបាន $\log_3 x=t\Leftrightarrow x=3^t$

ពេលនោះសមីការ (2) ក្លាយទៅជា $t-\log_y 2=0\Leftrightarrow \log_2 y=\frac{1}{y}\Leftrightarrow y=2^{\frac{1}{t}}$

តាមសមីការ (1) យើងបានសមីការ: $9^t+8^{\frac{1}{t}}=17 \quad (3)$

ឃើញថាចំនួនឫសរបស់ប្រព័ន្ធសមីការ $(*)$ ស្មើនឹងចំនួនឫសរបស់សមីការ (3)

ពិនិត្យ (3) ជាសមីការអាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរបស់ក្រាបពីរគឺ $(C): y=9^t+8^{\frac{1}{t}}$ និង $(\Delta): y=17$។

ពិនិត្យអនុគមន៍ $f(t)=9^t+8^{\frac{1}{t}}$ លើចន្លោះ $(0;+\infty)$

យើងមាន: $$f'(t)=9^t.\ln 9-\frac{8^{\frac{1}{t}}.\ln 8}{t^2}=9^t.\ln 9-\ln 8.8^{\frac{1}{t}}.\frac{1}{t^2}$$

$$f''(t)=\ln 9.9^t.\ln 9-\ln 8.\frac{8^{\frac{1}{t}}.\ln 8.\left(-\frac{1}{t^2}\right).t^2-2t.8^{\frac{1}{t}}}{t^4}$$

$$=\ln^2 9.9^t+\ln 8.\frac{8^{\frac{1}{t}}.\ln 8+2t.8^{\frac{1}{t}}}{t^4}>0 \ \forall(0;+\infty)$$

ទាញបាន $f'(t)$ កើនលើ $(0;+\infty)$។

ម្យ៉ាងទៀត: ដោយ $f'\left(\frac{1}{2}\right).f'(1)=18(\ln 9-\ln 2^{256})(\ln 27-\ln 16)<0$

ទាញបាន $\exists t_0 \in (0;1)$ យ៉ាងណាឲ្យ $f'(t_0)=0$

t	0	$1/2$	t_0	1	$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$		$f(t_0)$	$f(1)<0$	$+\infty$

ពីតារាងអថេរភាព យើងទាញបានសមីការ (3) មានឫសពីរជាចំនួនគត់វិជ្ជមានផ្សេងគ្នាជានិច្ច។
ម្យ៉ាងទៀតដោយ $f(1)=17$ និង $f(\log_3 2\sqrt{2})=17$ នាំឲ្យសមីការ (3) មានឫសពីរផ្សេងគ្នាគឺ:

$t=1$ និង $t=\log_3 2\sqrt{2}$ ។

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការ $(*)$ មានចំលើយពីរផ្សេងគ្នាគឺ $(3;2),\left(2\sqrt{2};\sqrt[3]{9}\right)$ ។

២. ប្រើវិចារអនុមានរួម ដើម្បីស្រាយថា (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន។

$+\, u_2=-\dfrac{4}{9}+\dfrac{16}{9\sqrt{3}}>-\dfrac{4}{9}+\dfrac{8}{9}=u_1$ ។ ឧបមាថា $u_k<u_{k+1}$

យើងបាន: $u_{k+2}=-\dfrac{4}{9}+\dfrac{8}{9}\sqrt{3u_{k+1}}>-\dfrac{4}{9}+\dfrac{8}{9}\sqrt{3u_k}=u_{k+1}$

ប្រើវិចារអនុមានរួមដើម្បីស្រាយថា (u_n) ត្រូវទាល់លើ។

ច្បាស់ណាស់: $u_n\le\dfrac{4}{3}$ ចំពោះគ្រប់ $n\ge 1$ ។

$+\, u_1<\dfrac{4}{9}<\dfrac{4}{3}$ ។ ឧបមាថា $u_k<\dfrac{4}{3}$ ។

យើងបាន: $u_{k+1}=-\dfrac{4}{9}+\dfrac{8}{9}\sqrt{3u_k}<-\dfrac{4}{9}+\dfrac{16}{9}=\dfrac{4}{3}$

ស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន ត្រូវទាល់លើ នាំឲ្យវាមានលីមីត។ តាង $\lim u_n=x$ ។

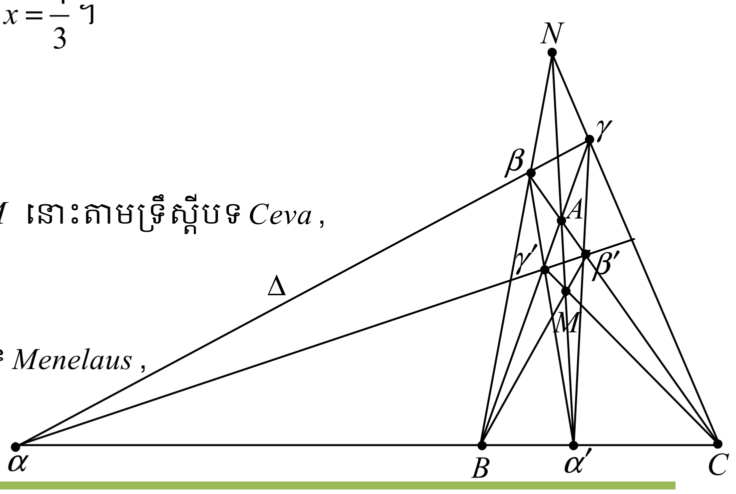
យើងបាន: $x=-\dfrac{4}{9}+\dfrac{8}{9}\sqrt{3x}\Leftrightarrow 9x+4\ge 0$ និង $81x^2-120x+16=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{4}{3}$ រឺ $x=\dfrac{4}{27}$

ដោយចំពោះគ្រប់ n គឺ: $u_n\ge u_1=\dfrac{4}{9}>\dfrac{4}{27}$ នាំឲ្យ $x=\dfrac{4}{3}$ ។

ដូចនេះ $\lim u_n=\dfrac{4}{3}$ ។

៣. 1) $A\alpha, B\beta$ និង $C\gamma$ ប្រសព្វគ្នាត្រង់ N ។



បន្ទាត់ទាំងបី $A\alpha', B\beta'$ និង $C\gamma'$ ប្រសព្វគ្នាត្រង់ M នោះតាមទ្រឹស្តីបទ *Ceva*,

យើងបាន: $\dfrac{\overline{\alpha'B}}{\overline{\alpha'C}}.\dfrac{\overline{\beta'C}}{\overline{\beta'A}}.\dfrac{\overline{\gamma'A}}{\overline{\gamma'B}}=-1 \qquad (1)$

បីចំនុច α', β', γ រត់ត្រង់ជួរគ្នា នោះតាមទ្រឹស្តីបទ *Menelaus*,

យើងបាន: $\dfrac{\overline{\alpha'B}}{\overline{\alpha'C}}.\dfrac{\overline{\beta'C}}{\overline{\beta'A}}.\dfrac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}=1 \qquad (2)$

ប្រៀបធៀប (1) និង (2) យើងបាន: $\frac{\overline{\gamma' A}}{\overline{\gamma' B}}=\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}$ (3)

បីចំនុច α',γ',β រត់ត្រង់ជួរគ្នា នោះតាមទ្រឹស្តីបទ *Menelaus* ,

យើងបាន $\frac{\overline{\alpha' B}}{\overline{\alpha' C}}\cdot\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}\cdot\frac{\overline{\gamma' A}}{\overline{\gamma' B}}=1$ (4)

ជំនួស (3) ចូល (4), យើងបាន $\frac{\overline{\alpha' B}}{\overline{\alpha' C}}\cdot\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}\cdot\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}=-1$ (5)

នោះតាមទ្រឹស្តីបទ *Ceva* យើងបានបន្ទាត់ទាំងបី $A\alpha', B\beta$ និង $C\gamma$ ប្រសព្វគ្នាត្រង់ N ។

2) បីចំនុច α,β,γ រត់ត្រង់ជួរគ្នា នោះតាមទ្រឹស្តីបទ *Menelaus* , យើងបាន: $\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}\cdot\frac{\overline{\beta' C}}{\overline{\beta' A}}\cdot\frac{\overline{\gamma' A}}{\overline{\gamma' B}}=1$ (6)

ប្រៀបធៀប (1) និង (5),យើងបាន: $\frac{\overline{\alpha' B}}{\overline{\alpha' C}}=-\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}$ (7)

ជំនួស (7) ចូល (5) យើងបាន: $\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}\cdot\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}\cdot\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}=1$

នោះតាមទ្រឹស្តីបទ *Menelaus* ទាញបានបីចំនុច α, β, γ រត់ត្រង់ជួរគ្នា។

៤. ពិនិត្យលំហាត់ទូទៅ:

រកអនុគមន៍ $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ ផ្ទៀងផ្ទាត់: $f(m+f(n))=n+f(m+a)\quad \forall m,n\in\mathbb{N}^*$ (*)

លក្ខខណ្ឌចាំបាច់: ឧបមាថាមានអនុគមន៍ f ផ្ទៀងផ្ទាត់ (*)

1) ស្រាយបញ្ជាក់ថា f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់

$\forall n_1,n_2\in\mathbb{N}^*$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(n_1)=f(n_2)$ យើងស្រាយបានថា $n_1=n_2$ ។

ពិតជាដូចនេះ, យើងមាន:

$f(m+f(n_1))=f(m+f(n_2))\Leftrightarrow n_1+f(m+a)=n_2+f(m+a)\Rightarrow n_1=n_2$.

ដូចនេះ f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់។

2) រកទំនាក់ទំនងរវាង $f(1), f(2), f(3), f(4), ..., f(n)$

$\forall m,n\in\mathbb{N}^*$, យើងមាន: $f(f(m)+f(n))=n+f(f(m)+a)=n+m+f(2a)$ (1)

$\forall p,q\in\mathbb{N}^*$, យ៉ាងណាឲ្យ $m+n=p+q$ យើងមាន:

$f(f(p)+f(q))=p+f(f(q)+a)=p+q+f(2a)$ (2)

តាម (1)&(2) យើងទាញបាន $f(f(m)+f(n))=f(f(p)+f(q))$

ដោយ f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ នោះយើងបាន: $f(m)+f(n)=f(p)+f(q)$ (3)

តាម (3) យើងទាញបាន: $f(2)-f(1)=f(3)-f(2)=f(4)-f(3)=...=f(n)-f(n-1)$

ដូចនេះ $f(1), f(2), f(3), f(4), ..., f(n)$ បង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានរេសុង d , ចំពោះ $d\in\mathbb{Z}$ និង $d\neq 0$ ។ ដូចនេះ $f(n)=f(1)+(n-1)d$

3) គណនា d និង $f(1)$

$a)$ តាម (*) ឲ្យ $n=1$ យើងបាន $f(m+f(1))=1+f(m+a)$

តាម (3)&(4) យើងទាញបាន: $f(1)+(m+f(1)-1)d=1+f(1)+(m+a-1)d$

$\Rightarrow f(1)d-d=1+ad-d\Rightarrow f(1)=a+\frac{1}{d}$

ដោយ $f(1)$ ជាចំនួនគត់ នាំឲ្យ $d=\pm 1$

$b)$ ចំពោះ $d=-1$ នាំឲ្យ $f(1)=a-1 \Rightarrow f(n)=-n+a$

អនុគមន៍នេះមិនផ្ទៀងផ្ទាត់ព្រោះ ចំពោះ $n>a$ នាំឲ្យ $f(n)<0$ ។

ចំពោះ $d=1$ នាំឲ្យ $f(1)=a+1 \Rightarrow f(n)=n+a$ ។

លក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់: ច្បាស់ណាស់អនុគមន៍នេះ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌរបស់ប្រធាន។

ដូចនេះ អនុគមន៍ដែលត្រូវរកគឺ $f(n)=n+2012$ ។

៥. ចំនួន n អាចសរសេរទៅជា $n=2^k.h$, ចំពោះ $k,h\in\mathbb{N}$ ហើយ h ជាចំនួនសេស, ពេលនោះយើងបាន:

$3^n-1=3^{2^k.h}-1=\left(3^{2^k}-1\right).\left(3^{2^k.(h-1)}+3^{2^k.(h-2)}+...+3^{2^k}+1\right)=\left(3^{2^k}-1\right).A,$

$\left(A=3^{2^k.(h-1)}+3^{2^k.(h-2)}+...+3^{2^k}+1\right)$

ដោយ $(h-1)$ ជាចំនួនគូ នាំឲ្យ A ត្រូវតែជាចំនួនសេស។ ពីនេះ, យើងទាញបានថា $\left(3^n-1\right)$ ចែកដាច់នឹង 2^{2010} លុះត្រាតែ $\left(3^{2^k}-1\right)$ ចែកដាច់នឹង 2^{2012} ។

ម្យ៉ាងទៀត, យើងមាន $3^{2^k}-1=\left(3^{2^{k-1}}+1\right)\left(3^{2^{k-2}}+1\right)\left(3^{2^{k-3}}+1\right)...+\left(3^2+1\right)\left(3^2-1\right)$, កត្តានីមួយៗក្នុងវង់ក្រចក នៅខាងស្តាំរបស់សមភាពនេះចែកដាច់នឹង 2 ហើយចែកមិនដាច់នឹង 4 , លើកលែង $3^2-1=8$, នាំឲ្យយើងបាន: $\left(3^{2^k}-1\right)$ មានផ្ទុក $[(k-1)+3=k+2]$ កត្តាគុណនៃ 2 ។

ដូចនេះ, ដើម្បីផ្ទៀងផ្ទាត់សំណើរប្រធាន ថាត្រូវរកចំនួនគត់វិជ្ជមាន n តូចបំផុតដើម្បីឲ្យ $\left(3^{2^k}-1\right)$ ចែកដាច់នឹង 2^{2012} , យើងគ្រាន់តែត្រូវមាន $k+2=2012$, គឺថា $k=2010$, ហើយដោយគ្រាន់តែរើសយក $h=1$ និង $n=2^{2010}$ ។

សរុបមក, ចំនួន n ដែលត្រូវរកគឺ $n=2^{2010}$ ។

៦. ពិនិត្យសំនុំ $X=\{1,2,3,...,n\}$ និងបណ្តាសំនុំរងមាន r ធាតុរបស់ X $(1\le r\le n)$ ។ បណ្តាសំនុំរងរបស់ X មានធាតុត្រូវបានរើសគឺ $1, 2, .., n-r+1$ (មានសំនុំរងជាច្រើន ដែលមានធាតុតូចបំផុតរួមគ្នា)។

វិធីបង្កើតបណ្តាសំនុំនេះគឺធ្វើដូចខាងក្រោម:

យក $A\subset X\{1\}, A$ មាន $r-1$ ធាតុ, នោះ $\{1\}\cup A$ ជាសំនុំមាន r ធាតុ ក្នុងនោះលេខ1 ជាធាតុតូចបំផុត។

ដូចនេះយើងបាន:

$+\,C_{n-1}^{r-1}$ សំនុំរងមានចំនួនតូចបំផុតស្មើ1។

ដូចគ្នាដែរ យើងបាន:

$+\,C_{n-2}^{r-1}$ សំនុំរងមាន r ធាតុដែលមានចំនួនតូចបំផុតស្មើ 2 ។

....

$+\,C_{n-(n-r+1)}^{r-1}$ សំនុំរងមាន r ធាតុ មានចំនួនតូចបំផុតស្មើ $n-r+1$ ។

ទាញបាន មធ្យមនព្វន្តរបស់បណ្តាចំនួនដែលត្រូវរើសចេញស្មើនឹង:

$$\frac{1}{C_n^r}\left(1.C_{n-1}^{r-1}+2C_{n-2}^{r-1}+...+(n-r+1)C_{n-(n-r+1)}^{r-1}\right)$$

យើងស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\dfrac{1}{C_n^r}\left(1.C_{n-1}^{r-1}+2C_{n-2}^{r-1}+...+(n-r+1)C_{n-(n-r+1)}^{r-1}\right)=\dfrac{n+1}{r+1}$

$$1.C_{n-1}^{r-1}+2C_{n-2}^{r-1}+...+(n-r+1)C_{n-(n-r+1)}^{r-1}=\frac{n+1}{r+1}.C_n^r=C_{n+1}^{r+1}\quad(1)$$

យើងតាងអង្គខាងឆ្វេងនៃ (1) ដោយ S ។ ប្រើរូបមន្ត $C_{m+1}^r-C_m^r=C_m^{r-1}$, យើងបាន:

$$S=1\left(C_n^r-C_{n-1}^r\right)+2\left(C_{n-1}^r-C_{n-2}^r\right)+...+(n-r)\left(C_{r+1}^r-C_r^r\right)+(n-r+1)C_r^r$$

$$=C_n^r+C_{n-1}^r+...+C_{r+1}^r+C_r^r=C_{n+1}^{r+1}$$

ដូចនេះ មធ្យមនព្វន្តរបស់បណ្តាចំនួនដែលរើសចេញស្មើនឹង $\frac{2013}{4}$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

វិញ្ញាសាស្មើទី២៨

១. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases}9^x-9^y=\dfrac{y-x}{9}\\ \log_3(x+y)^2=1+\log_3(xy+3)\end{cases}$

២. គេឲ្យ n ចំនុចនៅលើប្លង់ $(n\geq 2)$ ។ គេគូសសញ្ញាសំគាល់ឲ្យចំនុចកណ្តាលរបស់បណ្តាអង្កត់ ដែលភ្ជាប់រវាងពីរចំនុចណាក៏ដោយ ក្នុង n ចំនុចដែលបានឲ្យ។ តើចំនួនតូចបំផុត នៃបណ្តាចំនុចដែលត្រូវគូសសញ្ញាសំគាល់ស្មើប៉ុន្មាន?

៣. ក្នុងលំហគេឲ្យចតុមុខ $ABCD$ មានចំនុច O ស្ថិតក្នុងចតុមុខ ហើយនៅចំងាយស្មើគ្នាពីមុខទាំងអស់របស់ចតុមុខប្រវែង r ។ តាង h_A,h_B,h_C,h_D ជាប្រវែងពីចំនុច A,B,C,D ទៅបណ្តាមុខឈមរបស់ចតុមុខ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{1}{r}=\frac{1}{h_A}+\frac{1}{h_B}+\frac{1}{h_C}+\frac{1}{h_D}$ ។

៤. គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនវិជ្ជមាន $(x_n),(y_n)$ ចំពោះ $n=1,2,3,...$ ត្រូវបានកំណត់ដោយ: $\begin{cases}x_1=y_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ x_{n+1}=\dfrac{x_n}{4y_{n+1}^2-1}\\ y_{n+1}=\dfrac{y_n}{1-4x_{n+1}^2}\end{cases}$

$a.$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $x_n^2+y_n^2=1$ ចំពោះគ្រប់ $n=1,2,3,...$

$b.$ រកលីមីតរបស់ស្វ៊ីត $(x_n),(y_n)$ ។

៥. គេឲ្យ x,y ជាពីរចំនួនវិជ្ជមាន មានផលបូកស្មើ 1 ។ រកតំលៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម:

$$f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\text{ ។}$$

ចំលើយ

១. លក្ខខណ្ឌ $\begin{cases}x\neq -y\\ xy>-3\end{cases}$

$(1)\Leftrightarrow 9^{x+1}+x=9^{y+1}+y\quad(3)$

ពិនិត្យអនុគមន៍ $f(t)=9^t+t-1$ កំណត់នៅលើ $\mathbb{R}$

យើងបាន $f'(t)=9^t\ln 9+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ $f(t)$ កើននៅលើ $\mathbb{R}$

ដូចនោះ $(3) \Leftrightarrow f(x+1) = f(y+1) \Leftrightarrow x = y$

$(2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = xy + 9$.

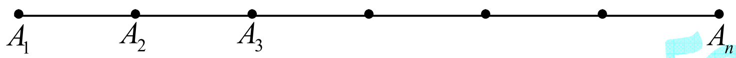
ដោយ $x = y$ នាំឲ្យយើងបាន: $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$

$x = 3 \Rightarrow y = 3$ (ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ (*))

$x = -3 \Rightarrow y = -3$ (ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ (*))

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធដែលឲ្យមានចំលើយពីរ $(x; y) = (3;3), (-3;-3)$ ។

២. ឧបមាថា A, B ជាចំនុចពីរ ដែលប្រវែងរវាងពួកវាធំបំផុត។ សង់រង្វង់ពីរ (A) និង (B) មានផ្ចិតរៀងគ្នាគឺ A និង B ,កាំស្មើ $R = \dfrac{AB}{2}$ ។



ពិនិត្យចំនុច C មួយក្នុងចំនួន $n-2$ ចំនុចផ្សេងទៀត។ យើញថាចំនុចកណ្តាលរបស់ AC ស្ថិតក្នុង (A) និង

ចំនុចកណ្តាលរបស់ BC ស្ថិតនៅក្នុង (B) ។ បណ្តាចំនុចកណ្តាលស្ថិតក្នុងរង្វង់តែមួយ គឺផ្សេងគ្នា។

ដូចនេះ ចំនួនចំនុចកណ្តាលមានមិនតិចជាង $2(n-2)+1 = 2n-3$ ។

នៅលើអ័ក្សចំនួន យើងដៅ n ចំនុចបង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម $d \neq 0$ ។

ពេលនោះ យើញថា $2n-3$ ចំនុចកណ្តាលរបស់បណ្តាអង្កត់

$A_1A_2, A_1A_3, ..., A_1A_n, A_2A_n, A_3A_n, ..., A_{n-1}A_n$ ខុសគ្នាពីមួយទៅមួយ។

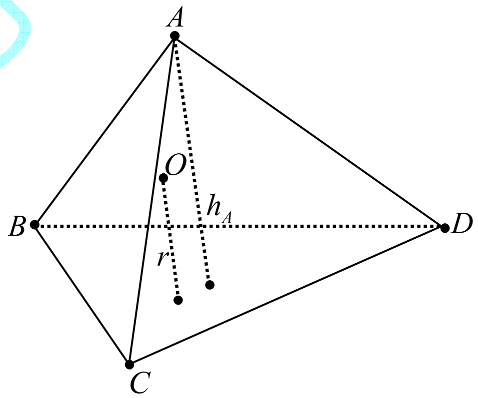
ក្រៅពីនោះ, ពិនិត្យបណ្តាអង្កត់ A_iA_k ណាក៏ដោយ, ចំនុចកណ្តាល M របស់ A_iA_k មានកូអរដោនេ

$x = \dfrac{a_i + a_k}{2}$ (a_i ជាកូអរដោនេរបស់ A_i នៅលើអ័ក្ស)

បើ $i + k \le n$ នាំឲ្យ $x = \dfrac{a_1 + a_{k+i-1}}{2}$ នោះ M ក៏ជាចំនុចកណ្តាលរបស់ A_1A_{k+i-1} ដែរ

បើ $i + k > n$ នាំឲ្យ $x = \dfrac{a_n + a_{k+i-n}}{2}$ នោះ M ក៏ជាចំនុចកណ្តាលរបស់ A_nA_{k+i-n} ដែរ។

៣. ដុំពីរ៉ាមីត $ABCD$ ត្រូវបានចែកចេញជាដុំចតុមុខបួនគឺ: $OBCD, OACD, OABD, OABC$ ។



ពីនោះទាញបាន: $\dfrac{V_{O.BCD}}{V_{ABCD}} = \dfrac{r}{h_A}, \dfrac{V_{O.ACD}}{V_{ABCD}} = \dfrac{r}{h_B}, \dfrac{V_{O.ABD}}{V_{ABCD}} = \dfrac{r}{h_C}, \dfrac{V_{O.ABC}}{V_{ABCD}} = \dfrac{r}{h_D}$

នាំឲ្យ $\dfrac{V_{O.BCD}+V_{O.ACD}+V_{O.ABD}+V_{O.ABC}}{V_{ABCD}}=r\left(\dfrac{1}{h_A}+\dfrac{1}{h_B}+\dfrac{1}{h_C}+\dfrac{1}{h_D}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{h_A}+\dfrac{1}{h_B}+\dfrac{1}{h_C}+\dfrac{1}{h_D}$

៤. $a)$ ស្រាយបញ្ជាក់តាមវិចារអនុមានរួម ចំពោះ $n=1$ នោះប្រព័ន្ធ (1) ពិត។

ឧបមាថា (1) ពិតចំពោះ $n=k, k\geq 1$

ពេលនោះ $1=x_k^2+y_k^2=\left(x_{k+1}\left(4y_{k+1}^2-1\right)\right)^2+\left(y_{k+1}\left(1-4x_{k+1}^2\right)\right)^2$

$\Leftrightarrow \left(x_{k+1}^2+y_{k+1}^2-1\right)\left(16x_{k+1}^2y_{k+1}^2+1\right)=0 \Leftrightarrow x_{k+1}^2+y_{k+1}^2=1$

ដូចនេះ (1) ពិតចំពោះ $n=1,2,3,...$

$b)$ យើងតាង $x_n=\sin\alpha_n, y_n=\cos\alpha_n$

តាមទំនាក់ទំនង Truy Hoi ទាញបាន $\alpha_{n+1}=\dfrac{\alpha_n}{3}$

ដូចនោះ $x_n=\sin\dfrac{\pi}{4.3^{n-1}}, y_n=\cos\dfrac{\pi}{4.3^{n-1}}$

ទាញបាន $\lim x_n=0, \lim y_n=1$

ចំណាំ: បេក្ខជនអាចដោះស្រាយសំនួរ $b)$ ដូចខាងក្រោម:

ដោយ $x_n>0, y_n>0, \forall n$ នោះ $y_{n+1}=\dfrac{y_n}{1-4x_{n+1}^2}>y_n>...>y_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (2)

ដូចនោះ $x_{n+1}=\dfrac{x_n}{4y_{n+1}^2-1}<x_n$ (ព្រោះ $y_{n+1}>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$)

ស្វ៊ីត (x_n) ចុះនិងត្រូវទាល់ក្រោមដោយ 0 នាំឲ្យមាន $\lim x_n=0$ ។ ស្វ៊ីត (y_n) កើន និងត្រូវទាល់លើដោយ 1 នាំឲ្យមាន $\lim y_n=\beta$ ។

តាមទំនាក់ទំនង *Truy Hoi* ឲ្យ $n\to+\infty$ យើងបាន: $\alpha=\dfrac{\alpha}{4\beta^2-1}$

បើ $\alpha\neq 0$ នោះ $\beta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ផ្ទុយនឹង (2) ។

ដូចនេះ $\alpha=0$ ដោយ $\alpha^2+\beta^2=1$ នាំឲ្យ $\beta=1$ ។

៥. យើងមាន: $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}=\dfrac{x^2}{x\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{y^2}{y\sqrt{1-y^2}}\geq\dfrac{(x+y)^2}{x\sqrt{1-x^2}+y\sqrt{1-y^2}}$ (វិសមភាព *Cauchy*)

$=\dfrac{1}{\left(\sqrt{\sqrt{x}\sqrt{x-x^3}+\sqrt{y}\sqrt{y-y^3}}\right)^2}$ (ព្រោះ $x,y>0; x+y=1$)

$\geq\dfrac{1}{\sqrt{(x+y)\left(x-x^3+y-y^3\right)}}$ (តាមវិសមភាព *Cauchy*)

$=\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(x^3+y^3\right)}}$ (ព្រោះ $x+y=1$)

ដោយ $1-\left(x^3+y^3\right)=(x+y)^3-\left(x^3+y^3\right)=3xy(x+y)=3xy\leq 3\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$

ដូចនេះ៖ $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}\geq\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(x^3+y^3\right)}}\geq\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{3}{4}}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

សមភាពកើតមានពេល $\begin{cases}\dfrac{x}{x\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{y}{y\sqrt{1-y^2}}\\ x=y\\ x+y=1\\ x>0, y>0\end{cases}\Leftrightarrow\ x=y=\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ៖ $\min f(x;y)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ពេល $x=y=\dfrac{1}{2}$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

វិញ្ញាសាស្នើទី២៩

១. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ: $\begin{cases}(2012-3x)\sqrt{4-x}+(6y-2009)\sqrt{3-2y}=0\\ 2\sqrt{7x-8y}+3\sqrt{14x-18y}=x^2+6x+13\end{cases}$

២. គេឲ្យស្វ៊ីត (x_n) ដូចខាងក្រោម: $x_0=0, x_1=1, x_{n+2}=x_{n+1}+x_n,\ \forall n\in\mathbb{N}$ ។
ចូររកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(x_0+\dfrac{x_1}{2012}+\dfrac{x_2}{2012^2}+\ldots+\dfrac{x_n}{2012^n}\right)$ ។

៣. គេឲ្យរង្វង់ (O) មានអង្កត់ផ្ចិត $AB=2R$, OC ជាកាំមួយរបស់រង្វង់កែងនឹង AB ហើយ I ចំនុចកណ្តាលរបស់ OC, M ជាចំនុចចល័តនៅលើរង្វង់ (O) ។ បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ M របស់រង្វង់ (O) កាត់បណ្តាបន្ទាត់ប៉ះរបស់ (O) ត្រង់ A, B រៀងគ្នាត្រង់ D និង $E; AE$ កាត់ BD ត្រង់ N ។ កំណត់ទីតាំងចំនុច M នៅលើ (O) ដើម្បីឲ្យត្រីកោណ NIA មានក្រឡាផ្ទៃធំបំផុត។

៤. រកគ្រប់បណ្តាពហុធា $P(x)$ មានមេគុណជាចំនួនពិត និងផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ:
$[P(x)]^2-2=2P(2x^2-1),\quad\forall x\in\mathbb{R}$ ។

៥. ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $\dfrac{x+2}{y}+\dfrac{3y+4}{x}=10$ មានចំលើយជាចំនួនគត់វិជ្ជមានច្រើនរាប់មិនអស់ ($(x;y)$ ត្រូវបានហៅថាជាចំលើយជាចំនួនគត់វិជ្ជមានរបស់សមីការ $\dfrac{x+2}{y}+\dfrac{3y+4}{x}=10$ បើ $(x;y)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការនេះហើយ $x\in\mathbb{N}^*, y\in\mathbb{N}^*$)។

៦. តើមានរឺទេ នូវសំនុំដែលមាន 2012 ចំនួនគត់វិជ្ជមានហើយមានលក្ខណ: ៖ បោះចោលចំនួនណាក៏ដោយចេញពីសំនុំនោះ គឺសំនុំ 2011 ចំនួនដែលនៅសល់ អាចចែកចេញជាពីរសំនុំរងដែលមានផលបូកគ្រប់ចំនួន (ស្ថិតនៅក្នុងសំនុំរងនីមួយៗនោះ) គឺស្មើគ្នា។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

វិញ្ញាសាស្នើទី៣០

១. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម: $\begin{cases}\log_{2012}\dfrac{4x^2+2}{y^3+x^2+1}=y^3-3y-1\\ x^4+x^2(y^2-y+1)=y^3+y\end{cases}$

២. គេឲ្យស៊ីត (a_n) $(n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2)$ កំណត់ដូចខាងក្រោម: បើ n អាចបំបែកបានជាផលគុណកត្តាបឋមគឺ $n=p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.\ldots.p_{k_n}^{\alpha_{k_n}}$ នោះ $a_n=\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}+\ldots+\dfrac{1}{p_{k_n}}$ ។

$a)$ គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_2.a_3.\ldots.a_n)$

$b)$ បង្ហាញថា $\sum\limits_{j=2}^{2012}(a_2.a_3.\ldots.a_j)<1$ ។

៣. គេឲ្យរង្វង់ $(O;R)$ នៅនឹង ហើយ A, B, C ជាបីចំនុចប្រែប្រួលនៅលើ (O) យ៉ាងណាឲ្យ ABC ជាត្រីកោណស្រួច។ AO កាត់រង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ OBC ត្រង់ចំនុចទីពីរ M, BO កាត់រង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ OAC ត្រង់ចំនុចទីពីរ N, CO កាត់រង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ OAB ត្រង់ចំនុចទីពីរ Q ។ រកតំលៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម $OM.ON.OP$ ។

៤. គេឲ្យពហុធា $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ ចំពោះគ្រប់មេគុណជាចំនួនពិត, ក្នុងនោះ: $a_0\neq 0$ ហើយ $f(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $f(x).f(2x^2)=f(2x^3+x)$ ។
ស្រាយបញ្ជាក់ថាពហុធា $f(x)$ គ្មានឬស។

៥. ស្រាយបញ្ជាក់ថា: ចំពោះចំនួនគត់នីមួយៗ a ធំជាង 2, មានចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ច្រើនរាប់មិនអស់ដើម្បីឲ្យ a^n-1 ចែកដាច់នឹង n ។

៦. តើមានចំលាស់ $(a_1, a_2, \ldots, a_{4024})$ ចំនួនប៉ុន្មានរបស់ $(1, 2, \ldots, 4024)$ ដើម្បីឲ្យ:

$$|a_1-1|=|a_2-2|=\ldots=|a_{4024}-4024|>0 \text{ ។}$$

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

វិញ្ញាសាស្នើទី៣១

១. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ: $\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{y}}=-24\\[2mm] \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{3}{\sqrt[4]{x}}+4\right)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{y}}-3\end{cases}$

២. គេឲ្យស៊ីត (x_n) កំណត់ដោយ: $\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{2}\\[2mm] x_{n+1}=\dfrac{x_n}{1+\sqrt{1+x_n^2}} & n\geq 1\end{cases}$

តាង $y_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x_k}{2^k}$ ។ ចូររក $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$ ។

៣. ត្រីកោណស្រួច ABC មាន $AB<AC$ ។ D, M និង N ជាបីចំនុចផ្ទៀងផ្ទាត់: D ស្ថិតនៅលើជ្រុង BC, M និង N ផ្សេងគ្នាស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ AC យ៉ាងណាឲ្យ AD ជាបន្ទាត់ពុះរបស់មុំ MDN និង $MA.NC=NA.MC$ បន្ទាត់ពុះក្នុងមុំ A របស់ត្រីកោណ ABC កាត់ BC ត្រង់ P, E, F រៀងគ្នាជាចំនុចប្រសព្វរបស់រង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ADP ទៅនឹង AC និង AB (E និង F មិនត្រួតនឹង A)។ បង្ហាញថាបីបន្ទាត់ AD, BE និង CF ប្រសព្វគ្នា។

៤. រកគ្រប់បណ្តាអនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ យ៉ាងណាឲ្យ: $f(x+y^3)=f(x)+y^2f(y)-2012y^2 \quad \forall x, y\in\mathbb{R}$ ។

៥. គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនគត់ (x_n) កំណត់ដោយ: $\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 9 \\ x_{n+3} = 3x_{n+2} + 6x_{n+1} - 8x_n \quad (n \ge 1) \end{cases}$

បង្ហាញថា x_n ជាចំនួនការេប្រាកដចំពោះគ្រប់ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

៦. ក្នុងប្លង់គេឲ្យ 50 ចំនុចផ្សេងគ្នា មិនមានបីចំនុចណារត់ត្រង់ជួរគ្នា, ចំនុចនីមួយៗលាបដោយពណ៌មួយក្នុងចំនោមបីពណ៌: ស្វាយ, លឿង, ខៀវ។ អង្កត់នីមួយៗ ដែលភ្ជាប់ពីរចំនុចណាក៏ដោយក្នុង 50 ចំនុចខាងលើត្រូវបានលាបដោយពណ៌មួយក្នុងចំនោមបីពណ៌: ក្រហម, ស, ខ្មៅ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា តែងមានចំនុចបីក្នុង 50 ចំនុចខាងលើត្រូវបានលាបដោយពណ៌ដូចគ្នា ហើយអង្កត់បីដែលភ្ជាប់ពួកវាក៏លាប់ដោយពណ៌ដូចគ្នាដែរ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

វិញ្ញាសាស្នើទី៣២

១. ដោះស្រាយសមីការ $(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) - 3\sin^2 x.\cos x = 0$

២. គេឲ្យស្វ៊ីត (u_n) ផ្ទៀងផ្ទាត់ $u_1 = 1, u_2 = 2, u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

រកគ្រប់តំលៃ n ដើម្បីឲ្យ u_n ចែកដាច់នឹង 2^k ($k \in \mathbb{N}^*$ ជាតំលៃដែលគេឲ្យ)។

៣. រកតំលៃតូចបំផុតរបស់កន្សោមខាងក្រោម:

$T = \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 8y + 20} + \sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5}$ ចំពោះ x, y ផ្ទៀងផ្ទាត់ $x - y - 1 = 0$។

៤. រកគ្រប់អនុគមន៍ $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ ផ្ទៀងផ្ទាត់: $\begin{cases} f(2) \ne f(4) \\ f(n) + f(n+1) = f(n+2).f(n+3) - 2012, \ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

៥. គេឲ្យ p ជាចំនួនបឋម $p \equiv 5 \pmod 8$ និង $p = a^2 + b^2$ $(a, b \in \mathbb{N}^*)$; $x, y \in \mathbb{Z}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a.x^2 - b.y^2$ ចែកដាច់នឹង p។

បង្ហាញថា x, y ចែកដាច់នឹង p។

៦. នៅលើប្លង់គេឲ្យ 2×2012 ចំនុច, ក្នុងនោះមិនមានបីចំនុចណារត់ត្រង់ជួរគ្នាទេ។ គេលាប 2012 ចំនុចដោយពណ៌ក្រហម ហើយលាប 2012 ចំនុចនៅសល់ដោយពណ៌ខៀវ។ បង្ហាញថា: ពេលណាក៏មានវិធីមួយ ក្នុងការភ្ជាប់គ្រប់ចំនុចពណ៌ក្រហមទៅនឹងគ្រប់ចំនុចពណ៌ខៀវដោយ 2012 អង្កត់ដោយមិនមានចំនុចរួមគ្នាណាមួយទេ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

វិញ្ញាសាស្នើទី៣៣

១. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមលើសំនុំចំនួនពិត:

$$\sqrt{1 + \sqrt{2x - x^2}} + \sqrt{1 - \sqrt{2x - x^2}} = 2(x-1)^2(2x^2 - 4x + 1)$$

២. ពិនិត្យសមីការ: $\dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-4} + \ldots + \dfrac{1}{x - n^2} = 0$, ចំពោះ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន n នីមួយៗ, សមីការខាងលើមានឫសតែមួយគត់ក្នុង $(0;1)$, តាងឫសនោះដោយ x_n។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ស្វ៊ីត (x_n) មានលីមីតកំណត់ពេល $n \to +\infty$។

៣. គេឲ្យត្រីកោណ ABC ចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត O។ រកសំនុំចំនុច បណ្ដាចំនុច M ស្ថិតនៅក្នុងរង្វង់ផ្ចិត O ដើម្បី

ឲ្យខ្សែឆ្លងកាត់តាម M គឺ AA', BB', CC' ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង: $\frac{MA}{MA'}+\frac{MB}{MB'}+\frac{MC}{MC'}=3$ ។

៤. រកគ្រប់អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ: $f(x^2+f(y))=y+f^2(x),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ ។

៥. គេឲ្យ $p_m=2^{2^m}+1$ ។ បង្ហាញថា p_m ជាចំនួនបឋមលុះត្រាតែ $3^{\frac{p_m-1}{2}}\equiv -1\,(\mathrm{mod}\ p_m)$ ។

៦. សិស្ស A មានចិញ្ចៀនមាស១០វង់, ចិញ្ចៀនប្រាក់២០វង់ និងចិញ្ចៀនពេជ្រ៣០វង់។ តើសិស្ស A មានវិធីប៉ុន្មានក្នុងការជ្រើសរើសចិញ្ចៀនចំនួន ៣០វង់ដើម្បីលក់, ដោយដឹងថាក្នុងប្រភេទចិញ្ចៀននីមួយៗមានយ៉ាងតិចមួយត្រូវបានជ្រើសចេញ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

វិញ្ញាសាស្នើទី៣៤

១. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម: $\begin{cases}\left(x^2+y^2-x-3\right)^2=\left(x^2-4\right)\left(y^2-x+1\right)\\ 3x^3-2y^3=22\end{cases}$

២. គេឲ្យស៊ីត (a_n) ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_i\in\mathbb{N}^*; a_1<a_2<\ldots<a_n$ ហើយ $\left|a_i-a_j\right|\ge\frac{a_i.a_j}{15}\ \forall i\ne j$

បង្ហាញថា $n\le 9$ ។

៣. គេឲ្យត្រីកោណ ABC មានមុំ B និង C ជាមុំស្រួច, កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ R, កំពស់ AF, មេដ្យាន AD និងបន្ទាត់ពុះ AE ។ ដឹងថាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ AED ស្មើ $\frac{1}{14}$ ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC ហើយក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ AFD ស្មើ $\frac{7}{50}$ ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC ។ គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC ជាអនុគមន៍ R ។

៤. គេឲ្យពហុធា $p(x)=\frac{x^7}{7}+\frac{x^5}{5}+\frac{3a+1}{3}x^3+bx^2+\frac{105c+34}{105}x+d$ ។ ចូររក លក្ខខណ្ឌចាំបាច់ និងគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីឲ្យ $p(x)$ មានតំលៃជាចំនួនគត់ ចំពោះគ្រប់ x ជាចំនួនគត់។

៥. រក $x,y\in\mathbb{N}^*$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $3^x=2^x.y+1$ ។

៦. គេឲ្យបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$ ។ តាង S_k ជាផលបូកគ្រប់បណ្ដាផលគុណរបស់ k ចំនួនដែលយកចេញពី $a_1,a_2,\ldots,a_n$ ។ បង្ហាញថា $S_k.S_{n-k}\ge\left(C_n^k\right)^2.\prod_{i=1}^{n}a_i$ ចំពោះ $k=1,2,\ldots,n-1$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

វិញ្ញាសាស្នើទី៣៥

១. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ: $\begin{cases}x^3(2+3y)=1 & (1)\\ x(y^3-2)=3 & (2)\end{cases}$

២. គេឲ្យស៊ីត $(u_n),(n=1,2,\ldots)$ ត្រូវបានកំណត់ដោយ: $u_1=\frac{1}{2},\ u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\sqrt{u_n^2+\frac{1}{4^n}}\right)$ ចំពោះគ្រប់ $n\ge 1$

ស្រាយបញ្ជាក់ថាស៊ីត (u_n) ជាស៊ីតរួម និងរក $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ ។

៣. គេឲ្យ $a_1,a_2,\ldots,a_n$ ជាបណ្ដាចំនួនពិត។ ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាពខាងក្រោម:

$$\frac{a_1}{1+a_1^2}+\frac{a_2}{1+a_1^2+a_2^2}+\ldots+\frac{a_n}{1+a_1^2+\ldots+a_n^2}<\sqrt{n}$$

៤. រកអនុគមន៍ $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ ជាប់ និងផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម:

$a)\ f[xf(y)]=y.f(x),\ \forall x,y>0$

$b)\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ ។

៥. គេឲ្យមុំ xOy និងរង្វង់ (I) ប៉ះនឹង Ox,Oy ត្រង់ A និង B ។ បន្ទាត់ d មួយ ប្រែប្រួលតែងប៉ះនឹង (I) ត្រង់ P កាត់ Ox,Oy ត្រង់ M,N ។ តាង K ជាចំនុចប្រសព្វរបស់ AB និង d; H ជាចំនុចប្រសព្វរបស់ KI និង OP ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា ផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ OHK ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់នឹងមួយ។

៦. មានក្រុមបាល់ចំនួន 6 ធ្វើការប្រកួតជាមួយគ្នា: (ក្រុមនីមួយៗ ត្រូវប្រកួត 5 ប្រកួត ជាមួយនឹង 5 ក្រុមផ្សេងទៀត)។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា ពេលណាក៏មាន 3 ក្រុម ក្នុងនោះគូនីមួយៗបានប្រកួតជាមួយគ្នារួចហើយ រឺ មិនទាន់បានប្រកួតជាមួយគ្នាសោះ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

វិញ្ញាសាស្នើទី៣៦

១. ដោះស្រាយវិសមីការ $\sqrt{2x^2+12x+6}-\sqrt{2x-1}>x+2$

២. គេឲ្យស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដូចខាងក្រោម:

$$u_1=1;u_2=2;u_{n+1}=\frac{1}{30}\ln(30^2(u_n-u_{n-1})^2+4)-2012^2+u_n\quad(1)$$ ។

តាង $b_n=\frac{u_n}{n},\ \forall n\geq 1$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា ស្វ៊ីត (b_n) មានលីមីតកំណត់បាន។

៣. គេឲ្យត្រីកោណ ABC ។ តាង M ជាចំនុចណាមួយ ហើយ H,K,L តាមលំដាប់ជាចំណោលកែងរបស់ M ទៅលើបណ្តាបន្ទាត់ BC,CA,AB ។ រកសំនុំបណ្តាចំនុច M ដើម្បីឲ្យ H,K,L រត់ត្រង់ជួរគ្នា។

៤. គេឲ្យ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់: $f(2011x)+2012=f(\sin(30x+4y))+f(\sin(30x-4y)),\forall x,y\in\mathbb{R}$ ។ ចូរកំណត់តំលៃរបស់ $f\left(\sqrt[2011]{\frac{30}{4}}\right)$ ។

៥. រកគ្រប់ឫសជាចំនួនគត់ $(x;n)$ របស់សមីការ $x+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}=n$ ។

៦. ពិនិត្យចំនួនគត់ $n>1$ ។ គេចង់លាបពណ៌ឲ្យគ្រប់បណ្តាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដោយពណ៌ពីរគឺខៀវ និងក្រហម យ៉ាងណាឲ្យគ្រប់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោមត្រូវបានផ្ទៀងផ្ទាត់ព្រមគ្នា។

i. ចំនួននីមួយៗ ត្រូវបានលាបដោយពណ៌មួយ, ហើយពណ៌នោះសុទ្ធតែត្រូវបានប្រើដើម្បីលាបចំនួនច្រើនរាប់មិនអស់,

ii. ផលបូករបស់ n ចំនួនផ្សេងគ្នាពីមួយទៅមួយ ដែលមានពណ៌ដូចគ្នា ជាចំនួនដែលមានពណ៌នោះដែរ។

តើអាចអនុវត្តន៍បាននូវវិធីលាបពណ៌ខាងលើរឺទេ បើ:

$1.\ n=2012$? $\qquad$ $2.\ n=2013$? .

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

វិញ្ញាសាស្នើទី៣៧

១. គេឲ្យ $a,b,c\in\left[\frac{1}{3};3\right]$ ។ បង្ហាញថា: $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\geq\frac{7}{5}$ ។

២. គេឲ្យស្វ៊ីត (U_n) មានច្បាប់កំណត់ និងរាងសំគាល់ដូចខាងក្រោម:

$$U_1 = 1$$
$$U_2 = 1 - C_2^2$$
$$U_3 = 1 - C_3^2$$
$$U_4 = 1 - C_4^2 + C_4^4$$
$$U_5 = 1 - C_5^2 + C_5^4$$
$$U_6 = 1 - C_6^2 + C_6^4 - C_6^6$$
....

ចូរគណនា U_{2012} ។

៣. គេឲ្យ $\frac{n(n+1)}{2}$ ....ស្មើគ្នា, ភ្ជាប់ចុងប៉ះគ្នាជាមួយគ្នា តាមរាងជាប្រាសាទពីរ៉ាមីតដូចរូប (លំហាត់នេះច្បាប់ដើមមិនបានដាក់រូបឲ្យទេ, គឺខ្វះចន្លោះ)។ គេផ្លាស់ប្តូរទីតាំង...... ម្តងមួយៗយ៉ាងណាឲ្យនៅទីតាំងថ្មី............នេះត្រូវប៉ះទៅនឹង........ពីរក្នុងចំណោម $\frac{n(n+1)}{2}-1$...... ផ្សេងទៀត។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា: ឆ្លងកាត់ n^2-n+1 ជំហាន នោះគ្រប់....ភ្ជាប់ចុងជាមួយគ្នា, ប៉ះគ្នា មានផ្ចិតរត់ត្រង់ជួរគ្នានៅលើបន្ទាត់តែមួយ។

៤. តាង A ជាចំនុចមួយស្ថិតនៅលើកន្លះរង្វង់ (Ω) អង្កត់ផ្ចិត BC ។ ទំលាក់ចំនោលកែង AH របស់ ΔABC ។ តាង (Ω_1) និង (Ω_2) ជាកន្លះរង្វង់ពីរមានអង្កត់ផ្ចិត HB និង HC ស្ថិតនៅខាងតែមួយធៀបនឹងកន្លះរង្វង់ (Ω) ខាងលើ។

$a/$ ចូរបង្ហាញពីវិធីសង់រង្វង់ពីរ (γ_1) និង (γ_2) រៀងគ្នាប៉ះទៅនឹង (Ω), កំពស់ AH, (Ω_1) និង (Ω_2) ។

$b/$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា កាំរបស់រង្វង់ (γ_1) និង (γ_2) គឺស្មើគ្នា។

៥. ដោះស្រាយសមីការ: $e^{\sin^3 x - \sin x} = \sin^2 x + \sin x + 1$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

វិញ្ញាសាស្នើទី៣៨

១. $a)$ ដោះស្រាយសមីការ: $\sin x + \sin y + \sin(x+y) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$b)$ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ: $\begin{cases} x = 1 + \sqrt{y} \\ y = 1 + \sqrt{z} \\ z = 1 + \sqrt{x} \end{cases} \quad (x, y, z \in \mathbb{R})$

២. $a)$ គណនាលីមីត: $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(\sqrt{\frac{x+2}{x}} - \sqrt[3]{\frac{x+3}{x}}\right)$

$b)$ ពិនិត្យស្វ៊ីតពីរ: $(a_n);(b_n)$ កំណត់ដោយ $\begin{cases} a_1; b_1 > 0 \\ a_{i+1} = b_i + \frac{1}{a_i} \\ b_{i+1} = a_i + \frac{1}{b_i} \quad (i = 1, 2, ...) \end{cases}$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $(a_{2012}+b_{2012})^2 > 16087$ ។

៣. គេឲ្យ ΔABC ជាត្រីកោណស្រួច ចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត O កាំ R ។ តាង R_1, R_2, R_3 រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅបណ្តាត្រីកោណ BOC, COA, AOB ។
ដោយដឹងថា $R_1+R_2+R_3=3R$ ។ គណនាមុំទាំងបីរបស់ ΔABC?

៤. គេឲ្យអនុគមន៍ $f:\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌពីរ:
$i.\ \ f(1)=2$
$ii.\ \forall n>1$ នោះ: $f(1)+f(2)+\ldots+f(n)=n^2 f(n)$
ចូរកំណត់រូបមន្តងាយស្រួល (រូបមន្តទូទៅ) ក្នុងការគណនា $f(n)$?

៥. ក្នុងការេដែលមានក្រឡាផ្ទៃស្មើ 6 គេដាក់ពហុកោណបី ដែលមានផ្ទៃក្រឡាស្មើ 3 ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា គេតែងរកបាន ពហុកោណពីរដែលផ្ទៃក្រឡារបស់ផ្នែករួមគ្នារបស់ពួកវា មិនតូចជាង 1?

៦. បង្ហាញថា: បើ $n; k\in\mathbb{N}$ នោះ: $C^n_{2n+k}.C^n_{2n-k} \le (C^n_{2n})^2$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

វិញ្ញាសាស្នើទី៣៩

១. ដោះស្រាយវិសមីការ: $\dfrac{2x}{\sqrt{2x+9}} < \sqrt{2x+1}-1$

២. គេឲ្យបណ្តាចំនួនវិជ្ជមាន x, y, z ផ្ទៀងផ្ទាត់ប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} x^2+xy+\dfrac{y^2}{3}=25 \\ \dfrac{y^2}{3}+z^2=9 \\ z^2+xy+x^2=16 \end{cases}$

គណនា $xy+2yz+3zx$ ។

៣. គេឲ្យ a, b, c ជាបណ្តាចំនួនពិតយ៉ាងណាឲ្យ $\begin{cases} a^2+b^2=1 \\ c+d=3 \end{cases}$
ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $ac+bd+cd \le \dfrac{9+6\sqrt{2}}{4}$

៤. គេឲ្យព្រីស $OAB.O_1B_1C_1$ មានបាត OAB ជាត្រីកោណកែងសមបាតត្រង់ O, $OA=OB=a$, បណ្តាជ្រុងខាង OO_1, AA_1, BB_1 កែងរួមគ្នាទៅនឹងបាត ហើយ $AA_1=a\sqrt{2}$ ។ M ជាចំនុចកណ្តាលរបស់ OA ។ គណនាក្រឡាផ្ទៃមុខកាត់ កាត់ដោយប្លង់ (α) កាត់តាម M, កែងនឹង A_1B ទៅនឹងព្រីស។

៥. គេឲ្យស្វ៊ីត (x_n): $\begin{cases} x_1=a>2 \\ 2013x_{n+1}=x_n^2+2011x_n \end{cases}$ ។ រក $\lim\left(\dfrac{x_1}{x_2-1}+\dfrac{x_2}{x_3-1}+\ldots+\dfrac{x_n}{x_{n+1}-1}\right)$ ។

៦. គេឲ្យ $x_i>1\ \ (i=1, 2, \ldots, n)$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i} \ge \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1.x_2.\ldots.x_n}}\ \ (n\in\mathbb{N}^*)$

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាអូឡាំពិកប្រពៃណីវៀតណាម 30-4 ឆ្នាំ២០១២

វិញ្ញាសាស្នើទី៤០

១. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 369 \\ \sqrt{x^2 - xy} + \sqrt{xy - y^2} = 3(x-y) \end{cases}$

២. គេឲ្យ p ជាចំនួនបឋម។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា: ចំនួន $5^p - 2^p$ មិនអាចសរសេរក្រោមរាង a^m បានទេ, ក្នុងនោះ a, m ជាបណ្តាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ហើយ m ធំជាង 1។

៣. គេឲ្យរង្វង់មួយ ជាមួយនឹងខ្សែធ្នូពីរ AB និង CD មិនស្របគ្នា។ បន្ទាត់កែងនឹង AB ត្រង់ A កាត់បណ្តាបន្ទាត់កែងនឹង CD ត្រង់ C និងត្រង់ D តាមលំដាប់ត្រង់ចំនុច M និង P។ បន្ទាត់កែងនឹង AB ត្រង់ B កាត់បណ្តាបន្ទាត់កែងនឹង CD ត្រង់ C និងត្រង់ D តាមលំដាប់ត្រង់ចំនុច Q និង N។
ស្រាយបញ្ជាក់ថា បណ្តាបន្ទាត់ AD, BC, MN ប្រសព្វគ្នា, ហើយបន្ទាត់ AC, BD, PQ ប្រសព្វគ្នា។

៤. គេឲ្យ a, b, c ជាប្រវែងជ្រុងទាំងបីរបស់ត្រីកោណមួយមានបរិមាត្រស្មើ 1។
ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^2 + b^2 + c^2 + 4abc \geq \frac{13}{27}$។ តើសញ្ញាស្មើកើតមាននៅពេលណា?

៥. គេឲ្យស្វ៊ីត (u_n) ត្រូវបានកំណត់ដោយ $u_1 = 1, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2012} + u_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$។
រក $\lim\left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ ។

៦. រកគ្រប់បណ្តាអនុគមន៍ជាប់ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់: $f(xy) = f\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) + (x-y)^2$ ចំពោះគ្រប់ $x, y \in \mathbb{R}$ ។